جلسه دوم
انتقال حرارت

معادله دیفرانسیل انتقال حرارت هدایتی

معادله دیفرانسیل انتقال حرارت به‌وسیله اعمال توازن انرژی روی یک المان کوچک کنترلی در انتقال حرارت قابل استنتاج است.

$$\dot E_{in} + \dot E_g - \dot E_{out} = \dot E_{st}$$

$\dot E_{st}$ = نرخ زمانی ذخیره انرژی

$\dot E_g$ = " " تولید "

$\dot E_{out}$ = " " خروج "

$\dot E_{in}$ = " " ورود "

دستگاه مختصات کارتزین:

با اعمال رابطه بالا روی المانی در دستگاه کارتزین (x و y و z) مطابق شکل، معادله دیفرانسیل کلی انتقال حرارت بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

حال اگر k ثابت باشد داریم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot q}{k} = \frac{\rho c_p}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

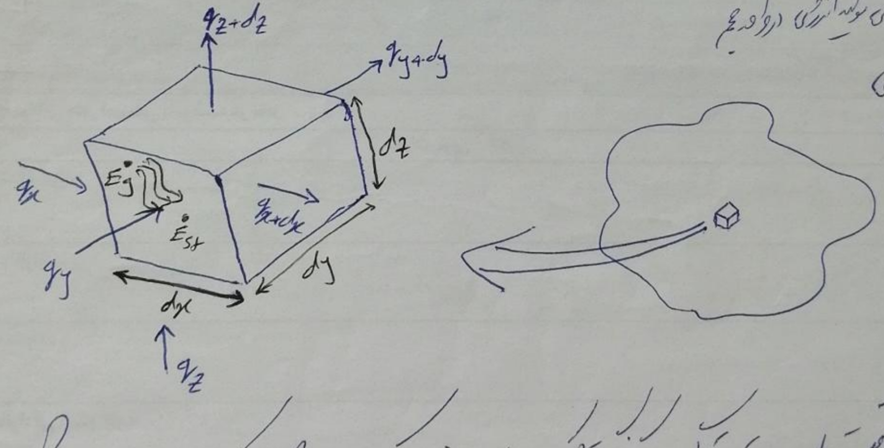
c_p: ظرفیت گرمایی ویژه

k: ضریب هدایت حرارتی

$\dot q$: نرخ زمانی تولید انرژی در واحد حجم

ρ: چگالی

t: زمان



آنچه در این قسمت باید مورد توجه قرار گیرد، چگونگی تشکیل معادله دیفرانسیل مذکور بر اساس شرایط حاکم بر انتقال حرارت می‌باشد. بر این اساس در استفاده از این معادله دیفرانسیل به نکات زیر توجه فرمایید.

۱- مقدار $\left(\frac{k}{\rho c_p}\right)$ ضریب پخش حرارتی نام دارد که با α نمایش داده می‌شود. لذا معادله دیفرانسیل انتقال حرارت بصورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot q}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

2- اگر هدایت حرارتی در یکی از جهات وجود نداشته باشد، جمله مربوط به آن جهت نیز در معادله وجود نخواهد داشت. مثلاً اگر هدایت دو بعدی در جهت x و y داشته باشیم، جمله $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ از معادله حذف می‌شود.

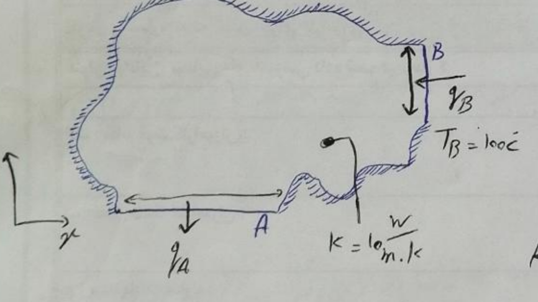
3) عبارت $\frac{\dot{q}}{k}$، جمله مربوط به تولید داخلی انرژی در داخل جسم است و اگر چنین منبعی در جسم نداشته باشیم نوشتن این جمله ضرورتی ندارد، زیرا برابر صفر است.

4- جمله سمت راست معادله، شامل مشتق جزئی $\frac{\partial T}{\partial t}$ می‌باشد که معرف تغییرات دما در واحد زمان است. اگر ذخیره یا مصرف انرژی متوقف شده باشد تغییرات زمانی دما از بین رفته و در اصطلاح جسم به حالت پایدار رسیده است. در این شرایط $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ می‌باشد.

5- اگر دما فقط تابع یک متغیر باشد، نظیر انتقال حرارت یک بعدی پایدار، بجای نماد (∂) از نماد (d) استفاده کنید.

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

مثال: در جسم دو بعدی و پایدار شکل زیر، گرادیان دما در سطح A برابر $\frac{\partial T}{\partial y} = 30\frac{k}{m}$ است. مقدار $\frac{\partial T}{\partial x}$ در سطح B چقدر است؟ توجه کنید که جسم به غیر از A و B عایق کامل حرارتی است $(A_A = 2A_B)$



جسم در شرایط پایدار است، بنابراین انتقال حرارت از دیواره B و A باید برابر گردند.

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} \Rightarrow q_B - q_A = 0$$

$$kA_A\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_A = kA_B\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_B \Rightarrow 2(30) = 1 \times \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_B$$

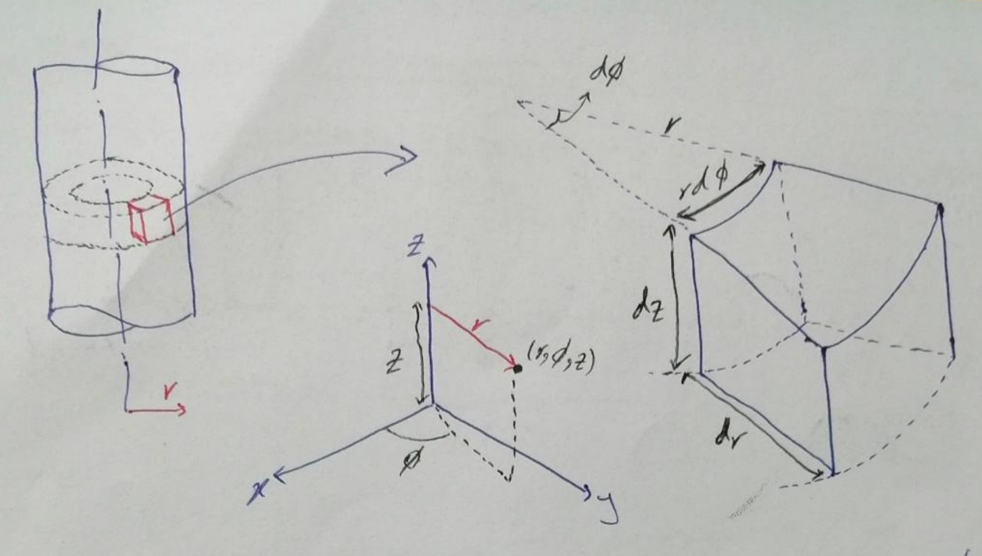
$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_B = 60\frac{k^\circ}{m}}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

اگر k ثابت باشد داریم:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$



حال درصورتی که انتقال حرارت یک بعدی (در جهت شعاعی) و در حالت پایا داشته باشیم، دمای T در مقطع استوانه‌ای فقط تابع r می‌باشد و معادله دیفرانسیل به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{q}}{k}=0$$

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{\dot{q}}{k}=0$$

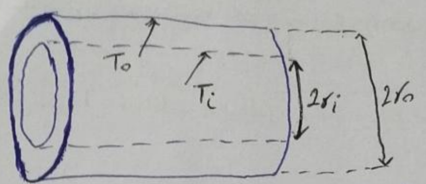
یکی از کاربردهای معادله فوق بررسی سیم‌ها و کابل‌های حاوی جریان می‌باشد. جریان عبوری از یک سیم، بر اثر مقاومت سیم ایجاد انرژی گرمایی در داخل آن می‌کند لذا جریان خود یک منبع داخلی تولید انرژی محسوب می‌شود.

اگر دمای سطح خارجی سیم حاوی جریان به شعاع R، برابر با T_w باشد با حل معادله دیفرانسیل بالا و اعمال شرایط مرزی (دمای سطح خارجی سیم) معادله توزیع دما در سیم را می‌توان به شکل زیر بدست آورد:

$$T-T_w=\frac{\dot{q}}{4k}\left(R^2-r^2\right)$$

T در رابطه اخیر، دما در شعاع دلخواه r می‌باشد که با جایگذاری شعاع مورد نظر می‌توان دما در آن شعاع را محاسبه کرد.

اگر معادله چهارم در دستگاه مختصات استوانه‌ای (برای یک استوانه توخالی با شعاع‌های داخلی و خارجی r_i و r_o با دماهای ثابت T_i و T_o روی این سطوح) حل کنیم پاسخ کلی زیر حاصل می‌شود.



$$T - T_o = \frac{\dot{q}}{4k}\left(r_o^2 - r_i^2\right) + \frac{T_i - T_o + \frac{\dot{q}\left(r_i^2 - r_o^2\right)}{4k}}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_o}\right)$$

اگر مقاومت ویژه سیم ρ، طول سیم L و سطح مقطع آن A باشد، مقاومت سیم (R) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

اگر مقاومت سیم R و جریان آن I باشد، برای توان تولیدی در سیم داریم:

$$P = RI^2$$

با توجه به رابطه‌های اخیر، مقدار $\dot{q}$ در یک سیم حاوی جریان به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{q} = \frac{P}{V} = \frac{RI^2}{AL}$$

$$\dot{q} = \frac{\rho I^2}{A^2}$$

مثال: جریان معادل $150\,A$ از سیمی به قطر $2mm$ و مقاومت مخصوص $70\,\mu\Omega.cm$ عبور می‌کند. نرخ حرارت تولیدی در واحد حجم این سیم چقدر است؟

$$\dot{q} = \rho\left(\frac{I}{A}\right)^2$$

$$\dot{q} = \left(70\times10^{-6}\times10^{-2}\right)\left(\frac{150}{\pi\left(1\times10^{-3}\right)^2}\right)^2 = \boxed{1595.8\ \frac{MW}{m^3}}$$

سوال ۲ : در مثال قبل درجه حرارت مرکز سیم و سطح آن چقدر اختلاف دارند $\left(k = 22 \frac{W}{m \cdot K} \right)$

$$T_o - T_w = \frac{q^{\circ} R^2}{4k} = \frac{1595.8 \times 10^{6} \times 1 \times 10^{-6}}{4 \times 22} = \boxed{18.1}$$