تحلیل مدارهای الکتریکی

تحلیل مدارهای DC

تحلیل مدارهای ac

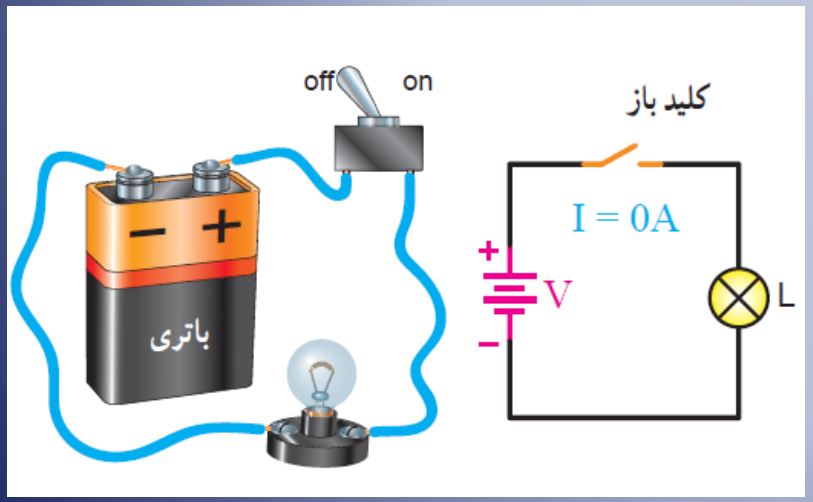
فهرست مطالب

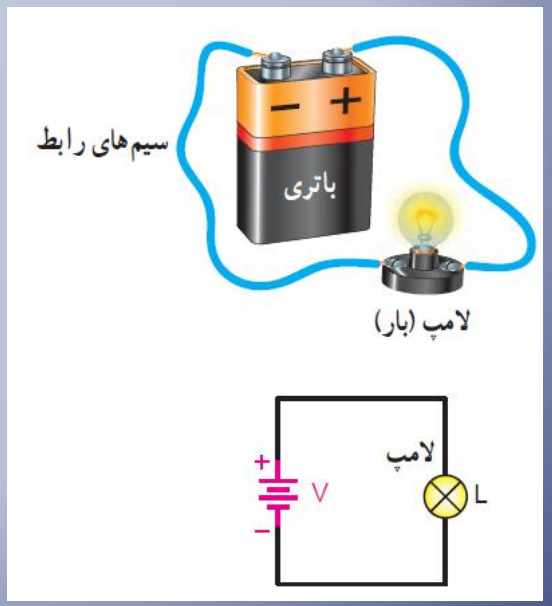
تعریف مدار الکتریکی	
عناصر مدار الکتریکی	
قوانین حاکم بر تحلیل مدارهای الکتریکی	
قواعد تقسیم جریان و تقسیم ولتاژ	
صفر کردن منابع تحریک مدار	
تعداد معادلات لازم و کافی برای حل مدار	
تبدیل مقاومت از اتصال مثلث به اتصال ستاره و برعکس	
توازن قدرت در یک مدار الکتریکی	
تحلیل مدار به روش تشکیل شبکه اساسی	
تحلیل مدار به روش پتانسیل گره	
تحلیل مدار به روش جریانهای مش	
تحلیل مدار به روش جمع آثار	
تحلیل مدار به روش معادلسازی تونن و نورتن	
قضیه انتقال توان حداکثر به مصرف کننده	

مدار الکتریکی

اتصالات داخلی یک وسیله الکتریکی با حداقل یک مسیر بسته را مدار الکتریکی گویند.

در این مسیر بسته یک جریان الکتریکی داریم که به علت جابجایی بارهای الکتریکی در اثر اختلاف پتانسیل اعمال شده به دو سر مدار، به وجود آمده است .



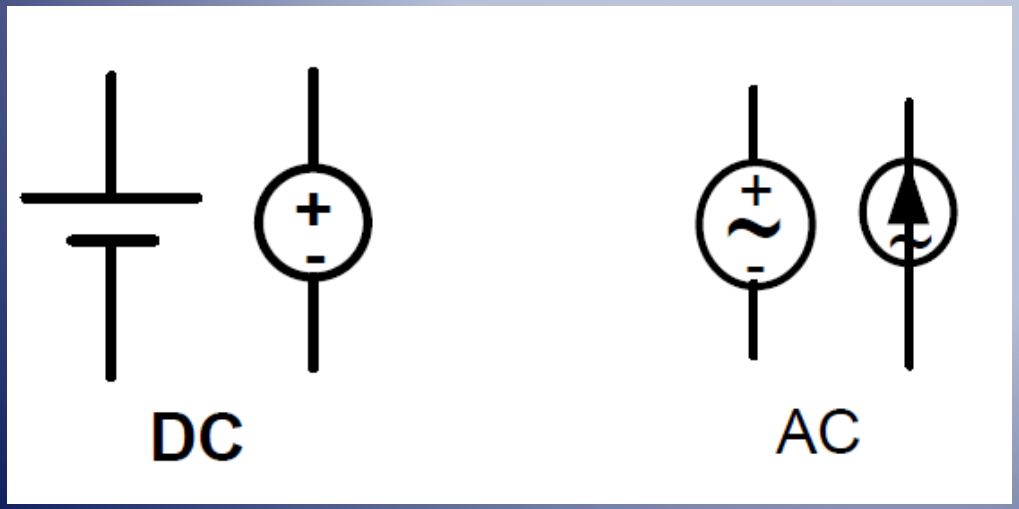


عناصر یک مدار الکتریکی

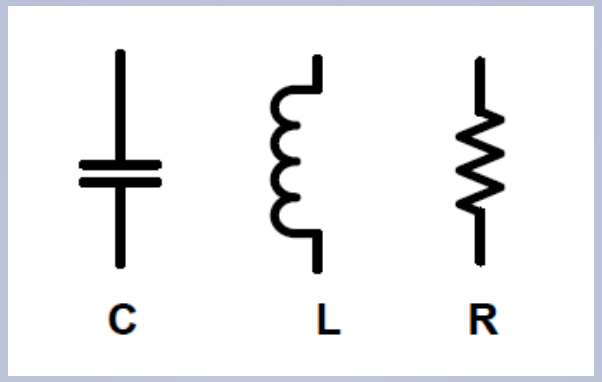
عناصر یک مدار الکتریکی به دو دسته تقسیم می‌شوند.

الف- عناصر فعال(active elements): عناصرتأمین کننده انرژی مدار

این عناصر شامل منابع تأمین کننده انرژی مدار هستند که عموما به صورت منبع ولتاژ مدار را تغذیه می کنند. منابع ولتاژ در دو شکل مستقیم (به صورت باتری و یا یکسوشده از برق شهر) و یا متناوب (دارای دامنه و فرکانس مشخص) انرژی الکتریکی مدار را تأمین می کنند.



ب- عناصر غیرفعال مدار(Passive Elements) شامل مقاومت، سلف و خازن هستند که در مدارهای الکتریکی با سمبلهای زیر نمایش داده می شوند و روابط بین ولتاژ و جریان آنها به صورت زیر است



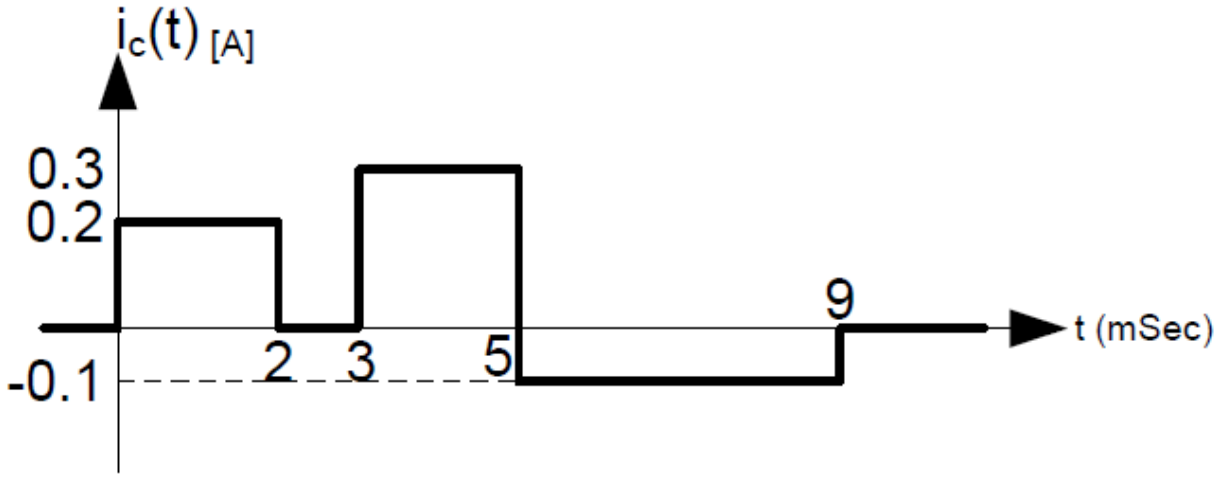
$$V_R(t) = RI_R(t)$$

$$v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C}\int_{\tau=0}^{\tau=t} i_c(\tau)d\tau \qquad i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_{\tau=0}^{\tau=t} v_L(\tau)d\tau$$

مثال از رابطه بین ولتاژ و جریان در خازن:

برای یک خازن $c = 100\mu f$ جریان عبوری از خازن به‌صورت نشان داده شده در شکل زیر است. اگر ولتاژ اولیه خازن $V_c(0) = 1V$ باشد، شکل‌موج ولتاژ دو سر خازن را رسم کنید؟

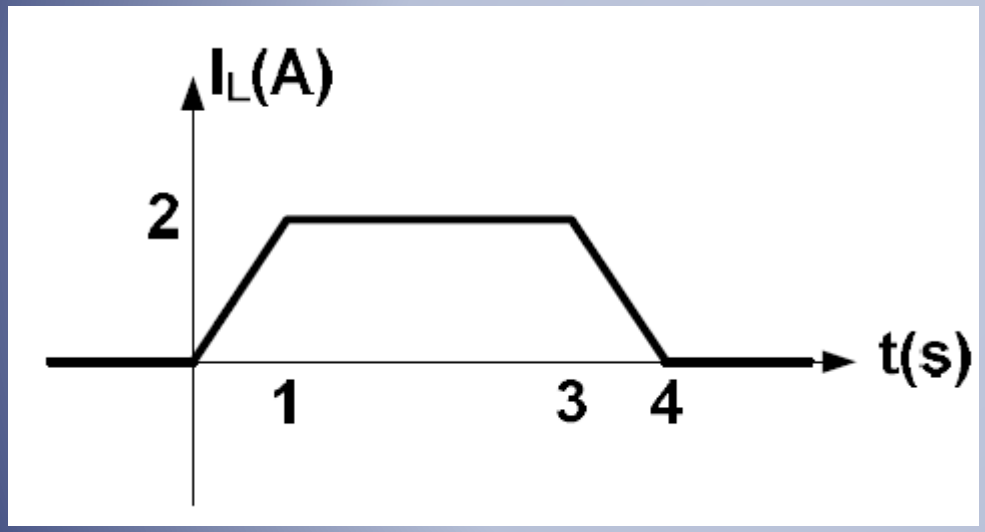


شکل موج جریان عبوری از خازن

حل:

مثال از رابطه بین ولتاژ و جریان در سلف:

شکل موج جریان عبوری از یک سلف به ظرفیت یک هانری به صورت زیر است. مطلوب است شکل موج ولتاژ، توان و انرژی ذخیره شده در سلف را رسم کنید.

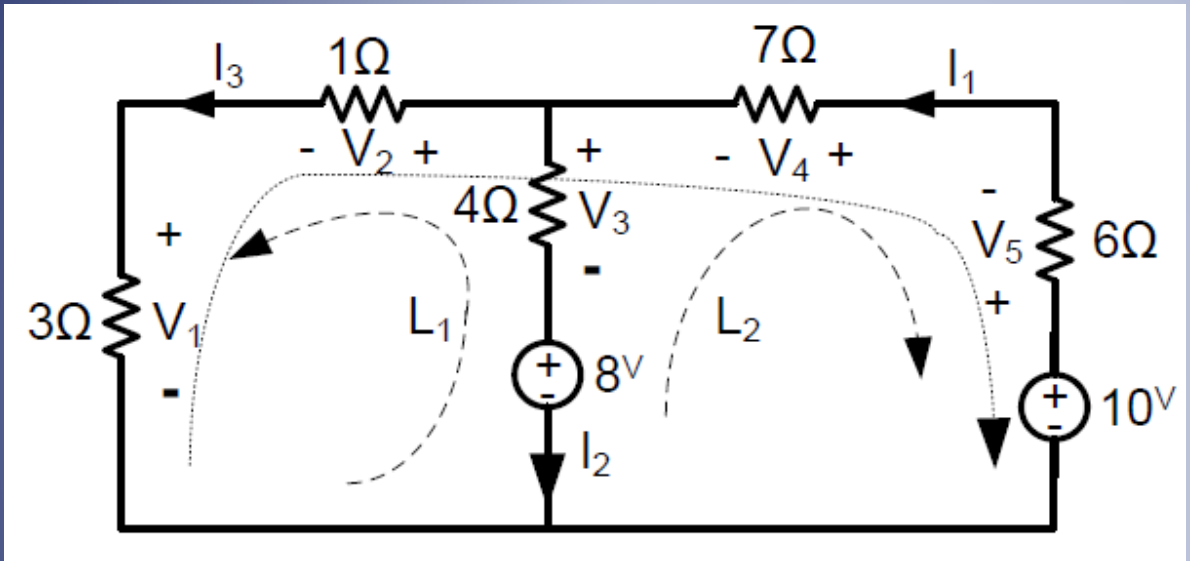


حل:

قوانین حاکم بر تحلیل مدارهای الکتریکی

۱- قانون ولتاژ کرشهوف: جمع جبری ولتاژها در هر مسیر بسته و در هر لحظه از زمان برابر صفر است

مثال



$$KVL_1: -8 - V_3 + V_2 + V_1 = 0$$

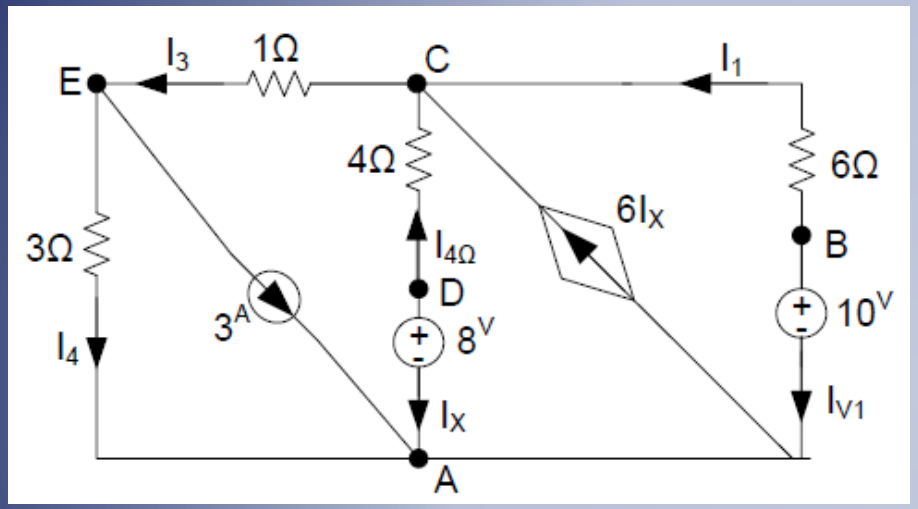
$$KVL_2: -8 - V_3 - V_4 - V_5 + 10 = 0$$

$$KVL_3: -V_1 - V_2 - V_4 - V_5 + 10 = 0$$

توجه دارید که KVL3 از اجتماع KVL های ۱ و ۲ به دست می آید

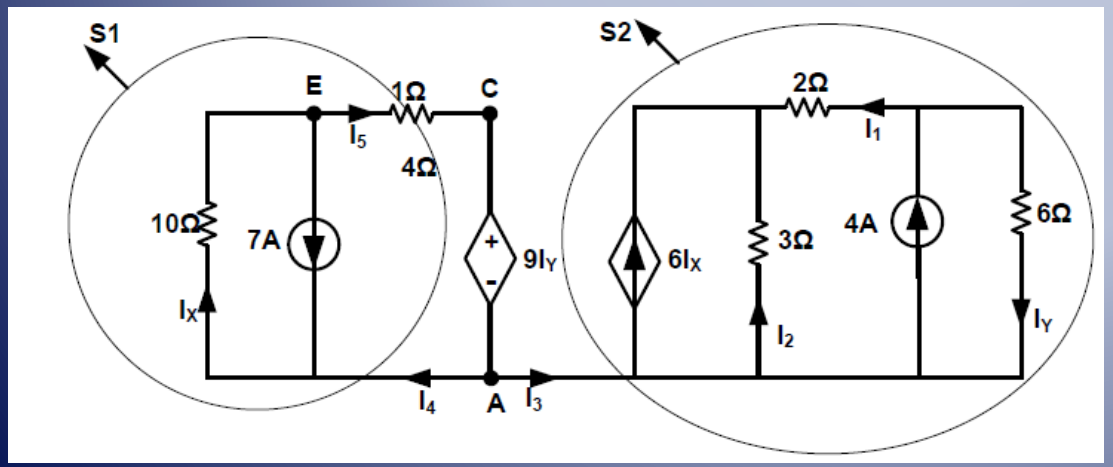
قوانین حاکم بر تحلیل مدارهای الکتریکی

۲- قانون جریان کرشهوف: جمع جبری جریان‌ها در هر نقطه اتصال (گره) و در هر لحظه از زمان برابر صفر است



$$KCL\begin{cases} A: & -I_4 - I_x - 3 + 6I_x + I_1 = 0 \\ B: & +I_1 + I_{V1} = 0 \\ C: & -I_1 - 6I_x - I_{4\Omega} + I_3 = 0 \\ D: & +I_x + I_{4\Omega} = 0 \\ E: & -I_3 + I_4 + 3 = 0 \end{cases}$$

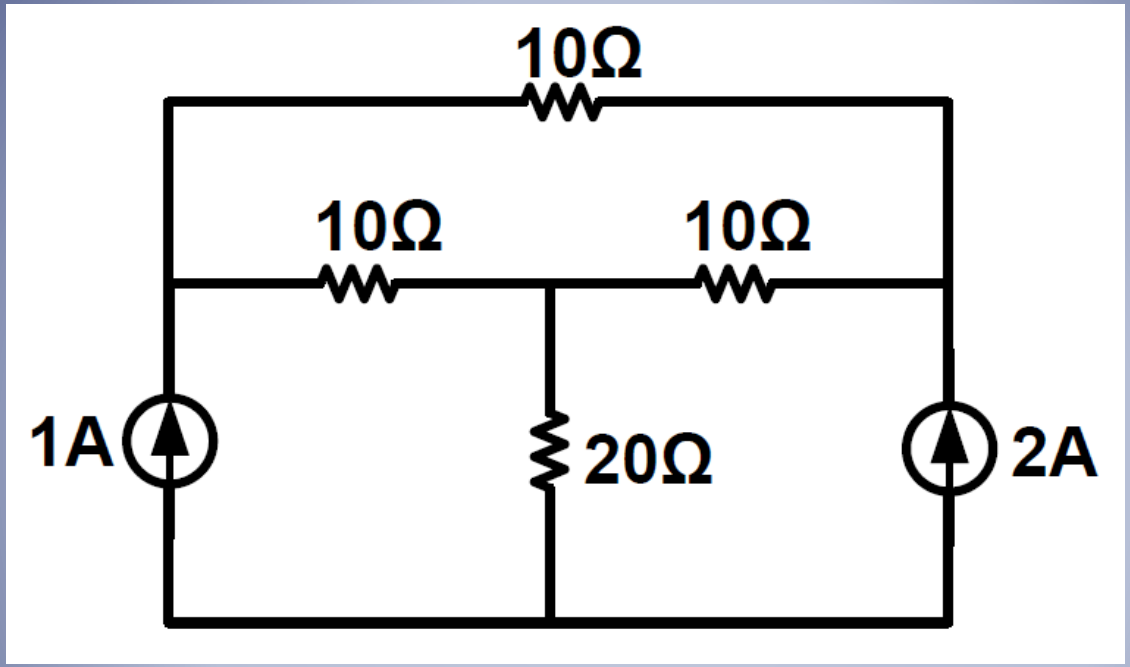
قانون جریان کرشهوف تعمیم یافته: جمع جبری جریان‌ها برای هر سطح بسته و در هر لحظه از زمان برابر صفر است



$$S_1: -I_4 + I_5 = 0 \Rightarrow I_4 = I_5$$

$$S_2: -I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = 0$$

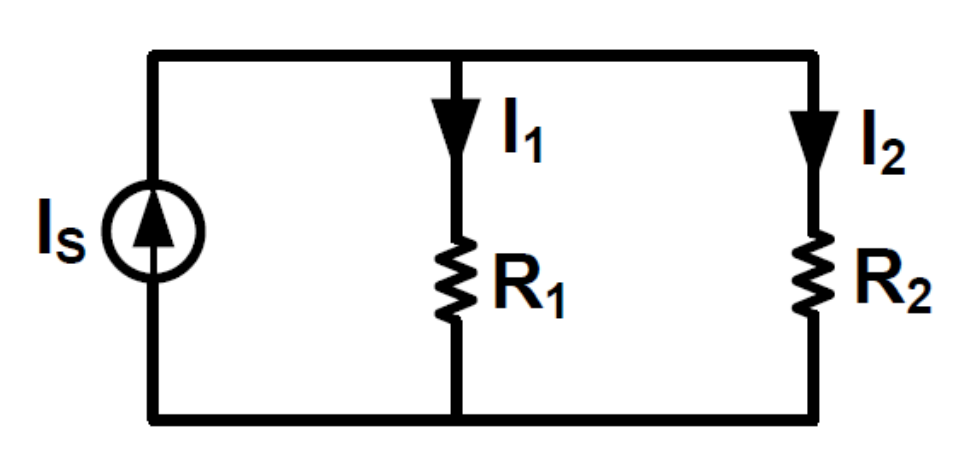
مثال: در شکل زیر توان تلف شده در مقاومت ۲۰ اهمی، چند وات است؟



حل:

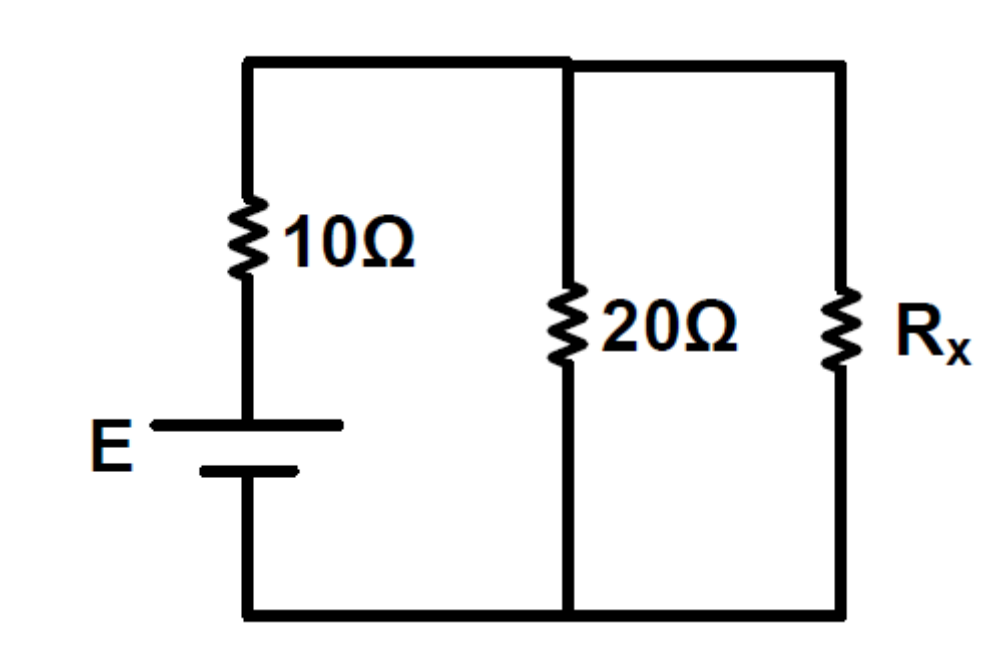
قواعد ساده برای تحلیل مدار

۱- قاعده تقسیم جریان: در دو شاخه موازی، جریان به نسبت عکس مقاومت ها تقسیم می شود.



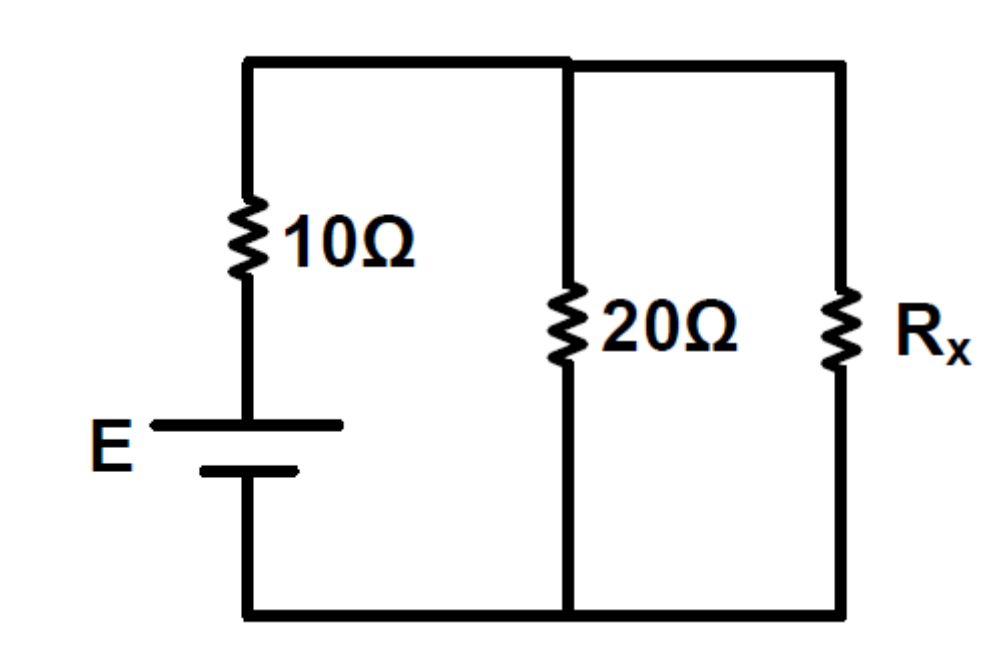
$$I_1 = I_s \times \frac{R_2}{R_2 + R_1} \quad , \quad I_2 = I_s \times \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

مثال: در شکل زیر اگر توان مصرفی مقاومت ۱۰ اهمی برابر ۴۰ وات و جریان مقاومت R_x برابر نیم آمپر باشد، مقدار مقاومت R_x، چند اهم است؟



حل:

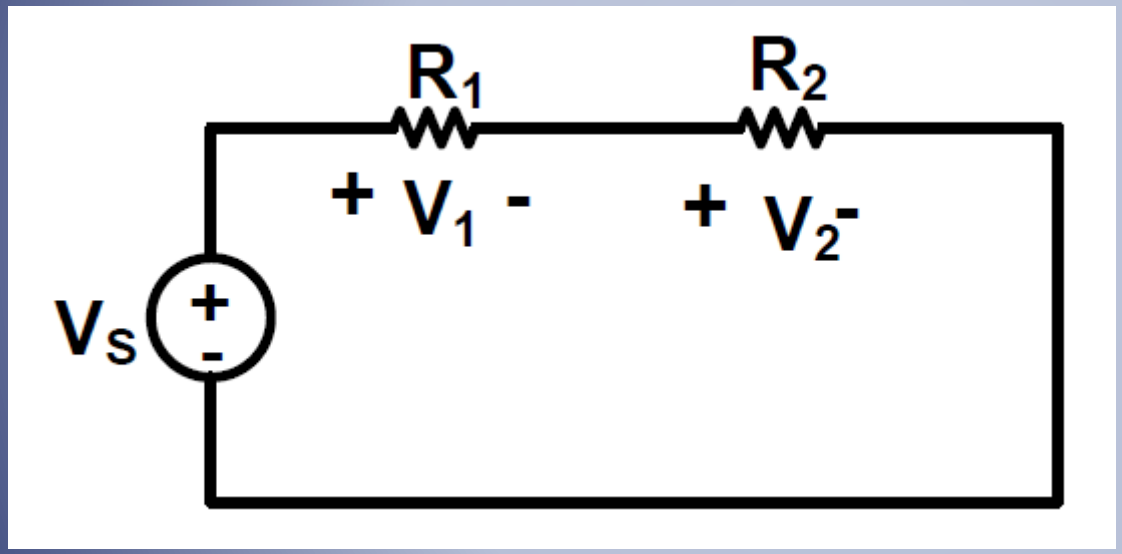
مثال: در شکل زیر اگر توان مصرفی در مقاومت ۱۰ اهمی نصف توان مصرفی در مقاومت R_x باشد، مقدار مقاومت R_x، چند اهم است؟



حل:

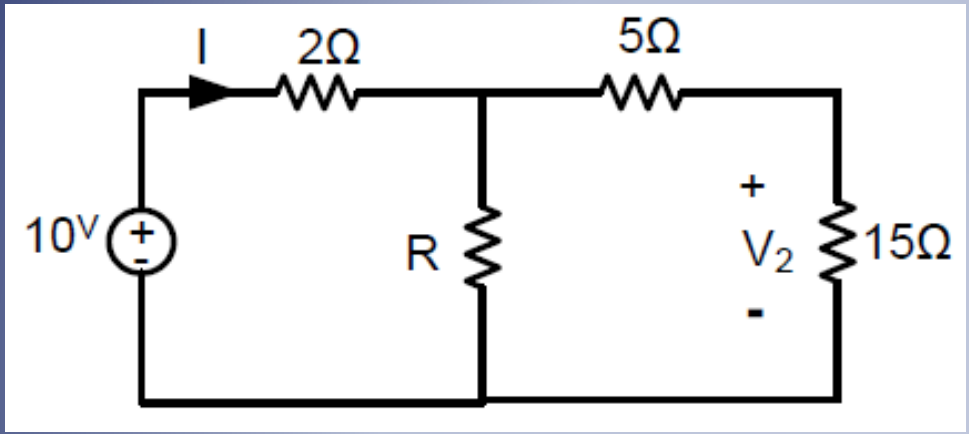
قواعد ساده برای تحلیل مدار

۲- قاعده تقسیم ولتاژ: در دو مقاومت (امپدانس) سری، ولتاژ به نسبت مقاومت (امپدانس) ها تقسیم می شود.



$$V_1 = V_s \times \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad , \quad V_2 = V_s \times \frac{R_2}{R_2 + R_1}$$

مثال: در شکل زیر اگر ولتاژ دوسر مقاومت ۱۵ اهمی برابر ۳ ولت باشد، مقدار جریان I برابر چند آمپر است؟



حل:

$$V_{15\Omega} = 3\,V \Rightarrow V_{5\Omega} = 1\,V \Rightarrow V_{2\Omega} = 10 - (1+3) = 6\,V \Rightarrow I = \frac{6}{2} = 3A$$

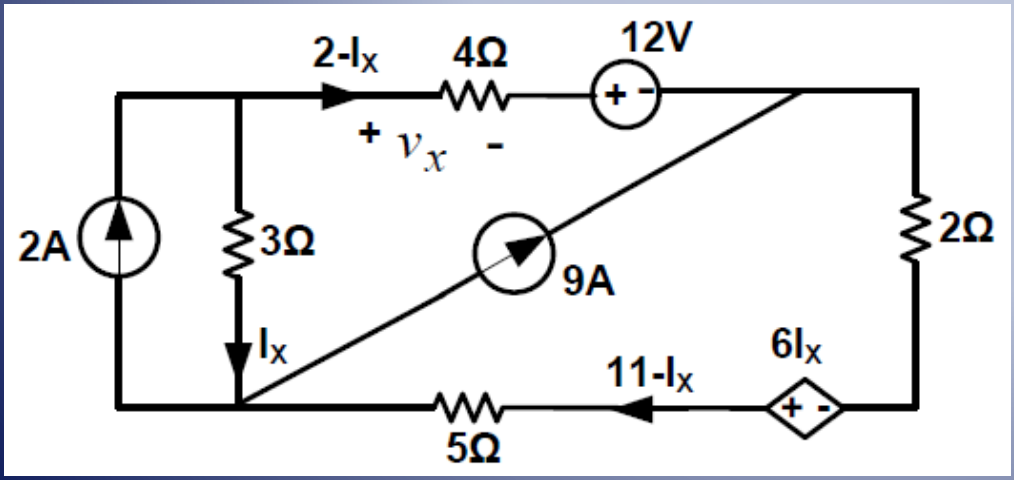
صفر کردن منابع

صفر کردن منبع ولتاژ یعنی اتصال کوتاه نمودن دو سر آن

صفر کردن منبع جریان یعنی اتصال باز نمودن دو سر آن

شبکه اساسی: از صفر نمودن منابع (مستقل و وابسته) موجود در مدار بدست می آید

مثال: شبکه اساسی مدار زیر را رسم کنید



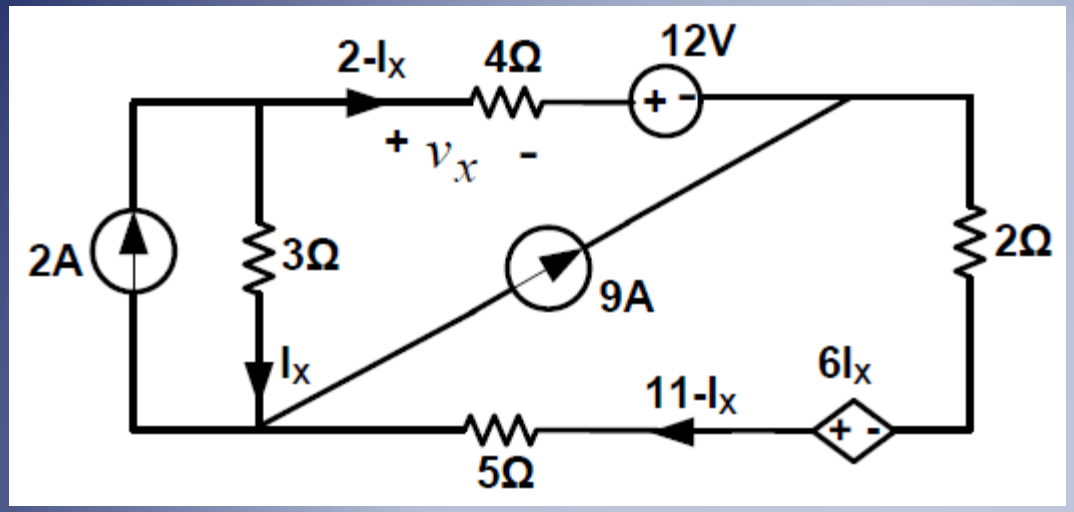
حل:

تعداد KVL ها و تعداد KCL های لازم و کافی برای حل مدار

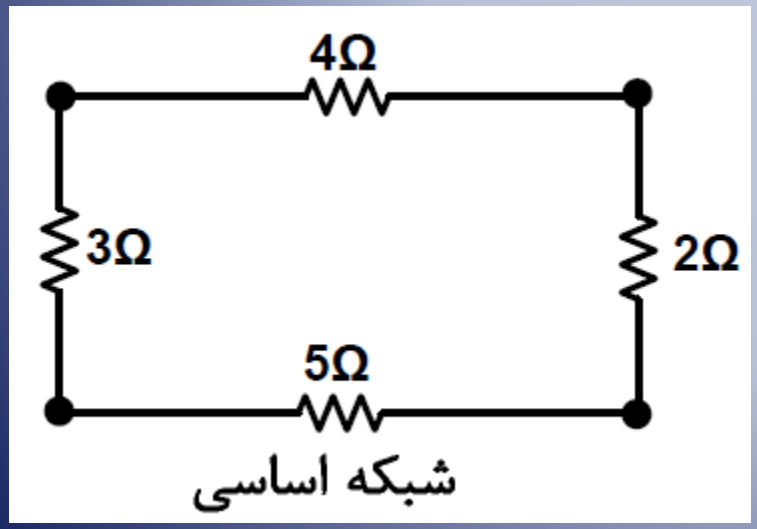
اگر شبکه اساسی (البته پس از ساده کردن مدار اولیه) شامل n گره و L عنصر باشد، آنگاه(n-1) معادله KCL و(n-1)-L معادله KVL برای حل مدار لازم و کافی است.

محل نوشتن KCL ها در گره های مشخص شده روی شبکه اساسی و مسیر نوشتن KVLها ، مسیرهای بسته مشخص شده در شبکه اساسی است

مثال: برای تحلیل مدار زیر نیاز به چند عدد KVL و چند عدد KCL است



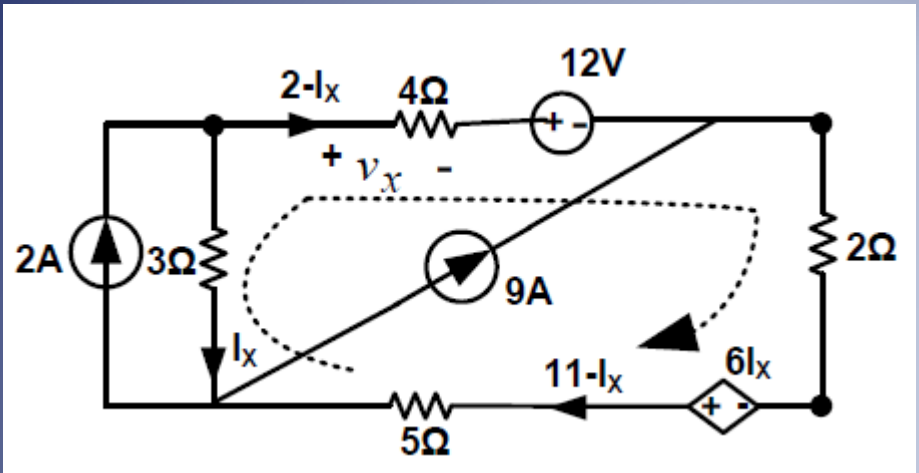
حل:

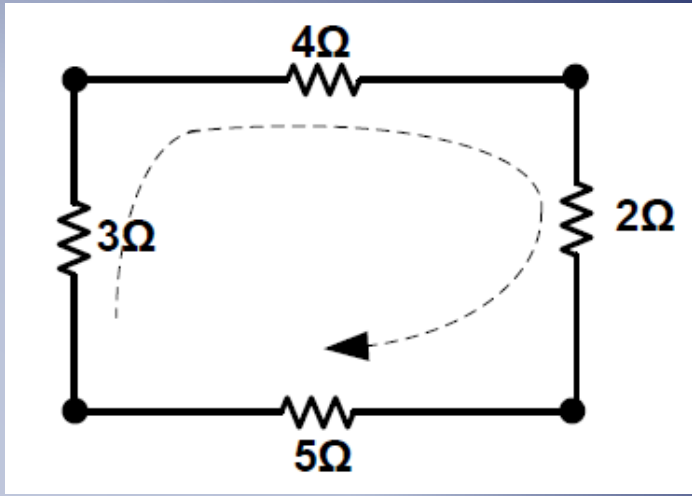


n=4 → عدد KCL لازم است (n-1)= 3

L=4→ عدد KVL لازم است L-(n-1)=1

شبکه اساسی محل نوشتن KVL ها و KCL ها را هم برای ما مشخص می کند



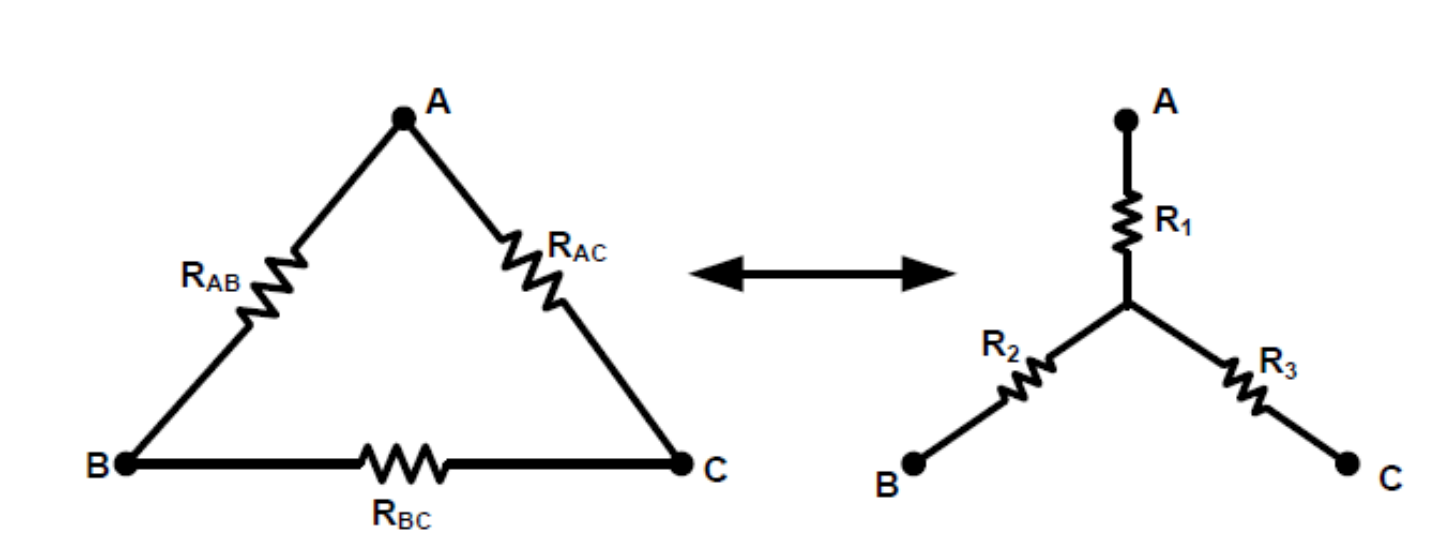


شبکه اساسی فوق شامل n = 4 گره و L= 4 عنصر است. بنابراین به منظور حل آن، به سه عدد KCL و یک عدد KVL نیاز است. KCL ها را مطابق شکل، به‌صورت ذهنی روی گره‌های مدار می‌نویسیم. اگر در تنها مسیر مشخص شده روی شکل فوق، معادله KVL بنویسیم داریم:

$$4(2-I_x)+12+2(11-I_x)-6I_x+5(11-I_x)-3I_x=0 \Rightarrow$$

$$-20I_x+97=0 \Rightarrow I_x=\frac{97}{20} \Rightarrow I_{2\Omega}=11-I_x=\frac{123}{20}=6.15A$$

تبدیل مقاومت از اتصال مثلث به اتصال ستاره و برعکس

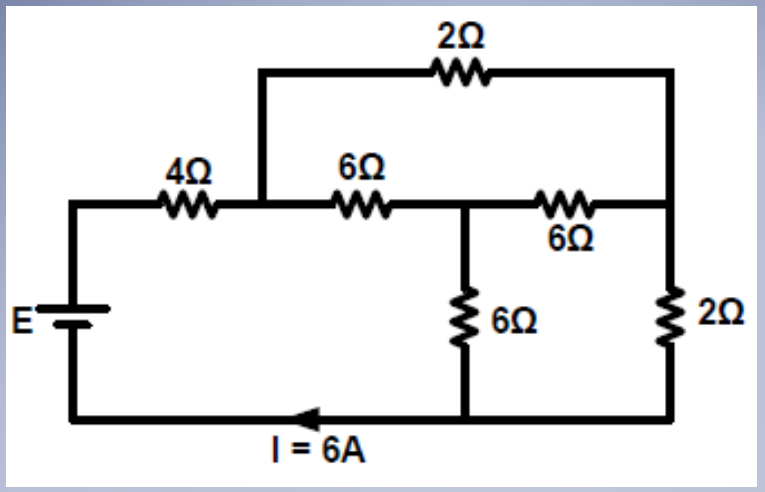


$$R_{AC} = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_2} \qquad R_{AB} = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_3} \qquad R_{BC} = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1}$$

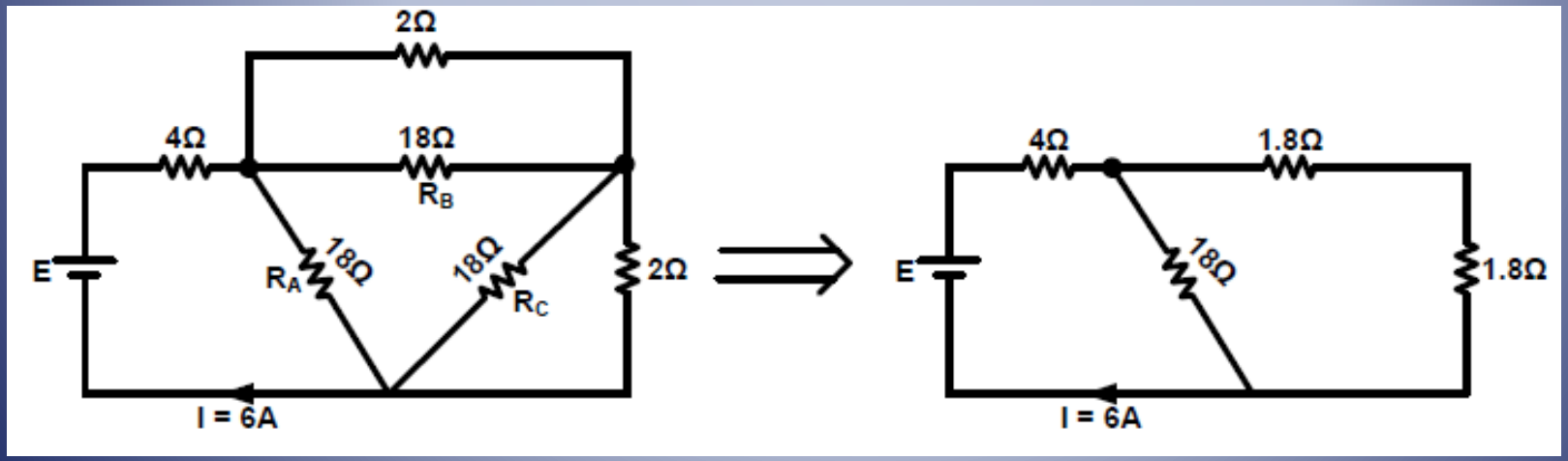
$$R_1 = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}} \qquad R_2 = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}} \qquad R_3 = \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}}$$

در حالت خاصی که مقاومتها مساوی باشند، مقاومت حالت مثلث سه برابر مقاومت حالت ستاره است

مثال- در مدار شکل زیر، اندازه منبع چند ولت است؟

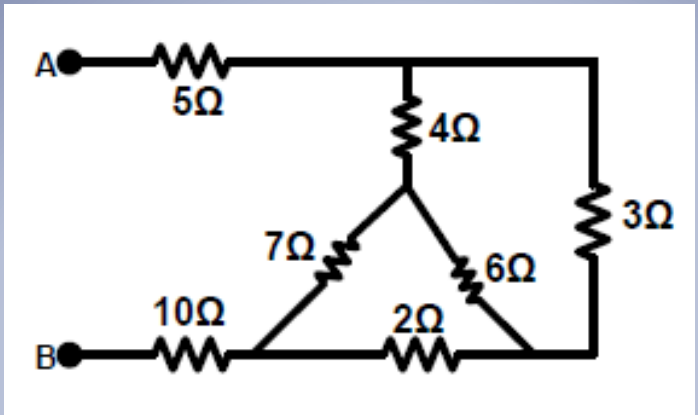


حل:

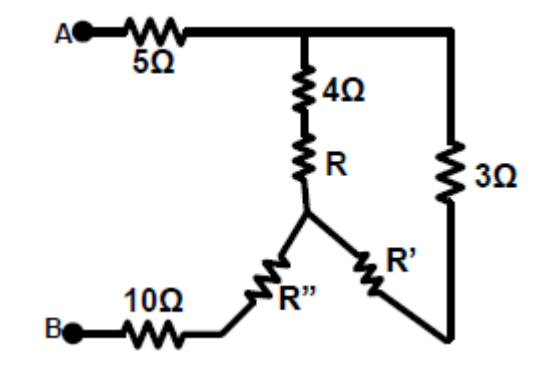


$$-E + 4 \times I + 3 \times I = 0 \Rightarrow -E + 4 \times 6 + 3 \times 6 = 0 \Rightarrow E = 42V$$

مثال: مقاومت معادل بین دو نقطه A و B در مدار شکل زیر چند اهم است؟



حل:



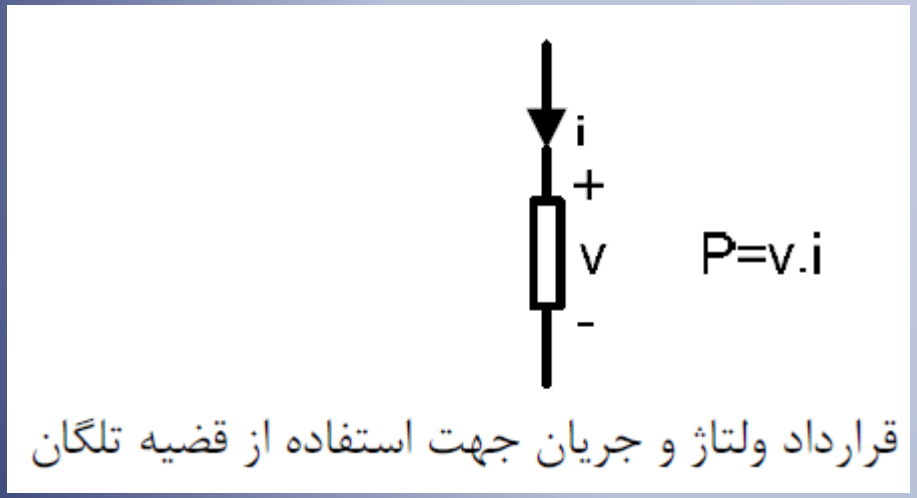
$$R = \frac{6\times7}{6+7+2} = 2.8\Omega \text{ و } R' = \frac{6\times2}{6+7+2} = 0.8\Omega \text{ و } R'' = \frac{7\times2}{6+7+2} = 0.93\Omega$$

$$R_{eq} = [(3+0.8)||(4+2.8)] + 0.93 + 5 + 10 = 18.36\Omega$$

توازن قدرت در یک مدار الکتریکی

مجموع توانهای یک مدار الکتریکی برابر صفر است(قضیه تلگان) یعنی توانی که عناصر تولیدکننده توان، تولید می‌کنند برابر است با توانی که عناصر مصرف‌کننده توان، مصرف می‌کنند. به عبارت دیگر، در یک مدار الکتریکی توازن قدرت برقرار است.

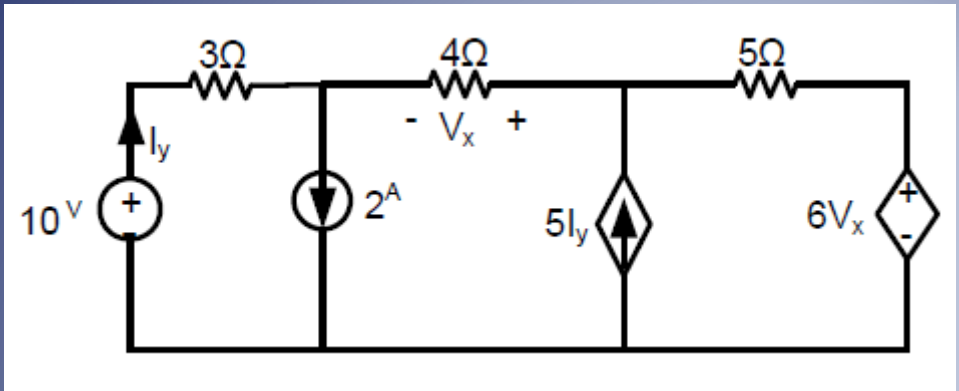
قرارداد تلگان:



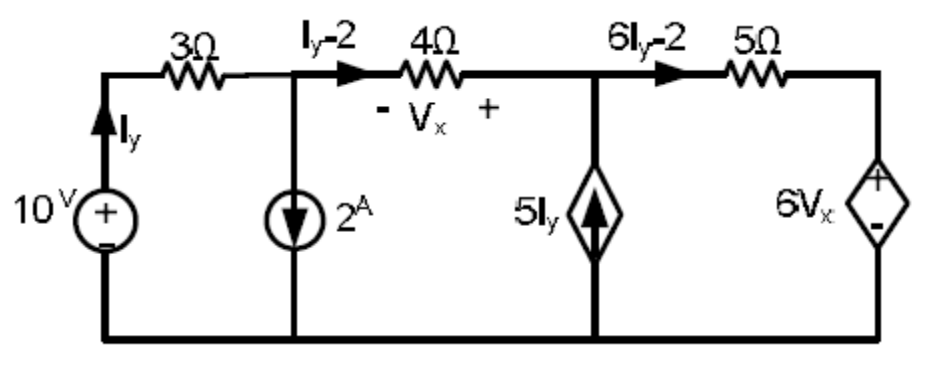
قرارداد ولتاژ و جریان جهت استفاده از قضیه تلگان

اگرطبق قرار داد تلگان، توان عنصری مثبت باشد آن عنصر مصرف کننده توان و در غیر اینصورت تولید کننده توان است

مثال: در مدار شکل زیر مشخص کنید کدام عنصر تولید کننده و کدام عنصر مصرف کننده توان است

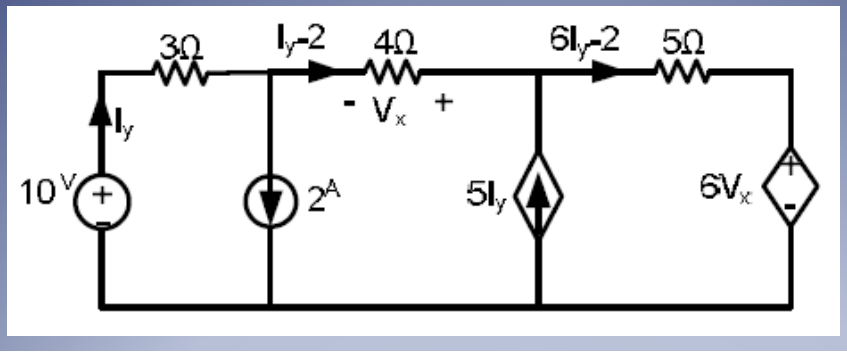


حل:



$$\begin{cases} KVL: -10 + 3I_y + 4(I_y - 2) + 5(6I_y - 2) + 6V_x = 0 \\ \\ \text{از طرفی } V_x = -4(I_y - 2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$-10 + 3I_y + 4(I_y - 2) + 5(6I_y - 2) + 6(-4I_y + 8) = 0 \Rightarrow 13I_y = -20 \Rightarrow I_y = \frac{-20}{13} A$$



$P_{10V} = 10 \times (-I_y) = 10 \times \frac{20}{13} = \frac{200}{13} W > 0 \Rightarrow$ منبع ۱۰ولتی مصرف کننده توان است

$P_{3\Omega} = R \times (I_y)^2 = 3 \times (\frac{-20}{13})^2 = \frac{1200}{169} W > 0 \Rightarrow$ مقاومت سه اهمی مصرف کننده توان است

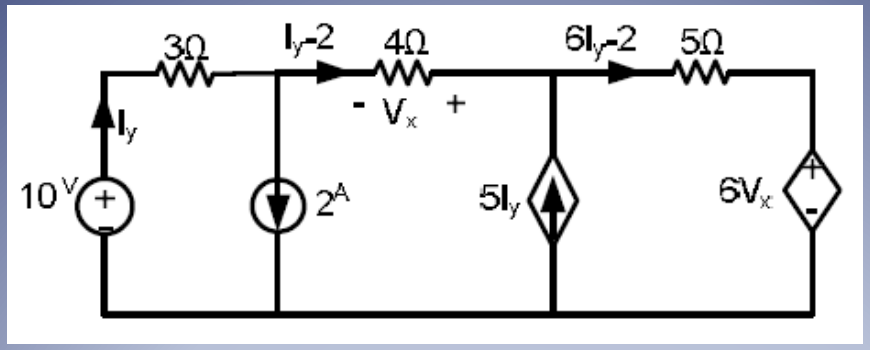
$P_{2A} = 2V_{2A} = 2 \times (-3I_y + 10) = 2 \times \frac{190}{13} = \frac{3800}{13} VA > 0 \Rightarrow$ منبع 2A مصرف کننده توان است

$P_{4\Omega} = 4 \times (I_y - 2)^2 = 4 \times (\frac{-20}{13} - 2)^2 = \frac{8464}{169} W > 0 \Rightarrow$ مقاومت 4 اهمی مصرف کننده توان

$V_x = -4(I_y - 2) = -4\left(\frac{-20}{13} - 2\right) = \frac{184}{13} \Rightarrow 6V_x = \frac{1104}{13}$

$P_{5I_y} = 5I_y \times (-6V_x - 5(6I_y - 2)) = 5 \times \frac{-20}{13} \times \left(\frac{-1104}{13} - 5(\frac{-146}{13})\right) = \frac{37400}{169} W > 0 \Rightarrow$

بنابراین منبع وابسته $5I_y$ نیز مصرف کننده توان است



مقاومت 5 اهمی مصرف کننده توان $P_{5\Omega} = 5(6I_y - 2)^2 = 5(\frac{-120}{13} - 2)^2 = \frac{+106580}{169} W > 0 \Rightarrow$

$$P_{6V_x} = 6V_x(6I_y - 2) = \frac{1104}{13} \times \left(\frac{-120}{13} - 2\right) = \frac{1104}{13} \times \frac{-146}{13} = \frac{-161184}{169} W < 0$$

بنابراین منبع وابسته $6V_x$ تولیدکننده توان است.

برای تحقیق قضیه تلگان مجموع هفت توان فوق را محاسبه می‌کنیم داریم:

$$\sum_{i=1}^{7} P_i = P_{10V} + P_{3\Omega} + P_{2A} + P_{4\Omega} + P_{5I_y} + P_{5\Omega} + P_{6V_x}$$

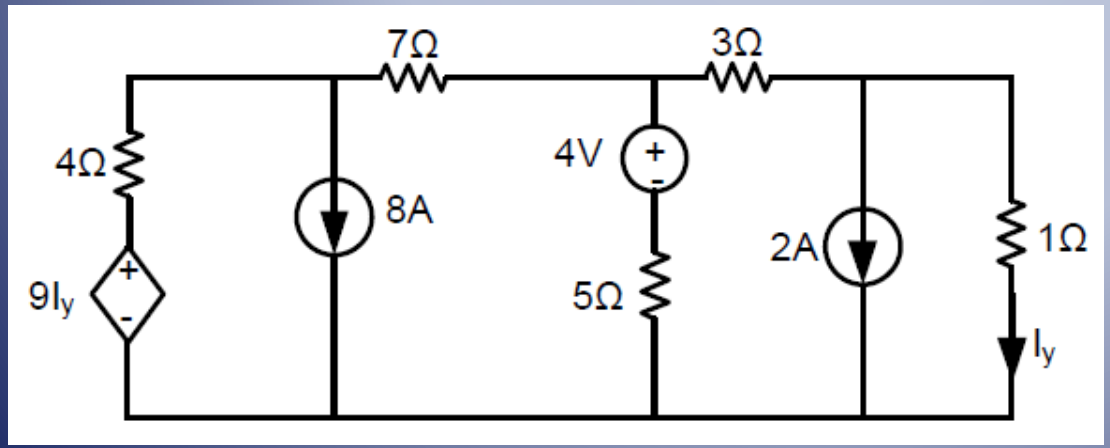
$$= \frac{200}{13} + \frac{1200}{169} + \frac{380}{13} + \frac{8464}{169} + \frac{183400}{169} + \frac{106580}{169} + \frac{-161184}{169} = 0$$

فصل دوم: روشهای تحلیل مدارهای مقاومتی

۱- تحلیل مدار به روش تشکیل شبکه اساسی

در تحلیل مدار به‌روش تشکیل شبکه اساسی، ابتدا شبکه اساسی مدار مورد نظر را تشکیل دهید تا تعداد KVL ها وKCL ها و محل نوشتن آنها مشخص شود.
سپس KCLها را به‌صورت ذهنی روی مدار نوشته و در مسیرهای مشخص شده توسط شبکه اساسی، معادلات KVL را بنویسید.

مثال: به روش تشکیل شبکه اساسی، توان مصرفی مقاومت ۴ اهم را بدست آورید.



حل: