دانشگاه فنی و حرفه ای

دانشگاه فنی و حرفه ای خراسان شمالی

آموزشکده فنی و حرفه ای پسران شیروان

برنامه درسی جلسه سوم: مدارهای الکتریکی ۲

موضوع: تبدیلات لاپلاس ، تعریف تبدیل لاپلاس ، خواص اساسی تبدیل لاپلاس

گردآورنده: مسعود ظاهرپور

برنامه درسی جلسه چهارم پنجم

موضوع کاربرد تبدیل لاپلاس در مدارهای الکتریکی

گردآورنده: مسعود ظاهرپور

اسفند ۱۳۹۸

۱- تعریف تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) \stackrel{\Delta}{=} \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

که $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می‌نامیم که تابعی از s می‌باشد.

مثال ۱: اگر $f(t) = Au(t)$ باشد تبدیل لاپلاس آنرا بدست آورید.

$$f(t) = Au(t) \rightarrow F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} Ae^{-st}dt = \frac{-A}{s}e^{-st}\Big|_{0}^{\infty} = -\frac{A}{s}(0-1)$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{A}{s}$$

۲- خواص اساسی تبدیل لاپلاس

۲-۱- خاصیت یکتایی

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس یک تابع زمانی مانند $f(t)$ بوده و تابع زمانی دیگری مانند $k(t)$ وجود داشته باشد که $F(s)$ تبدیل لاپلاس آن نیز باشد، در این صورت تفاوت تابع $k(t)$ با تابع $f(t)$ خیلی جزئی است.

۲-۲- خاصیت خطی بودن

اگر فرض کنیم f_1 و f_2 دو تابع زمانی دلخواه و c_1 و c_2 دو ثابت اختیاری باشند در اینصورت خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\left[c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\right] = c_1\mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + c_2\mathcal{L}\left[f_2(t)\right] = c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$$

۲-۳- خاصیت مشتق گیری

اگر فرض کنیم $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) \rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) \cdots - sf^{(n-2)}(0^-) - f^{(n-1)}(0^-)$$

۲-۴- خاصیت انتگرال گیری

اگر فرض کنیم $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد آنگاه داریم:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) \rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

۲-۵- شیفت زمانی

اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد آنگاه داریم: $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) \rightarrow \mathcal{L}\left[f(t-a)\right] = e^{-as}F(s)$

۲-۶- شیفت فرکانسی

اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد آنگاه داریم: $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) \rightarrow \mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right] = F(s-a)$

۲-۷- تبدیل لاپلاس کانولوشن

اگر $F_1(s)$ تبدیل لاپلاس $f_1(t)$ و $F_2(s)$ تبدیل لاپلاس $f_2(t)$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس کانولوشن $f_1(t)$ و $f_2(t)$ بصورت روبرو است:

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(s).F_2(s)$$

۲-۸- قضیه مقدار اولیه

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد آنگاه مقدار اولیه تابع $f(t)$ یعنی $f(0^+)$ از رابطه روبرو بدست می‌آید:

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

۲-۹- قضیه مقدار نهایی

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ بوده و تابع $sF(s)$ پایدار باشد آنگاه مقدار نهایی تابع $f(t)$ یعنی $f(\infty)$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f(\infty) = \underset{s\to 0}{Lim}\, sF(s)$$

۲-۱۰- خاصیت تغییر مقیاس

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس $f(at)$ بصورت زیر بدست می‌آید $(a > 0)$

$$\mathcal{L}\left[f(at)\right] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

و تبدیل لاپلاس $f(\frac{t}{a})$ بصورت زیر است:

$$\mathcal{L}\left[f(\frac{t}{a})\right] = aF(as)$$

۲-۱۱- خاصیت تبدیل لاپلاس توابع متناوب

فرض کنید تابع $f(t)$ به صورت مجموعی از یک تابع معین $f_1(t)$ و صورتهای انتقال یافتهٔ آن در فواصل معینی از زمان مانند T ، $2T$، ... ، kT، ... باشد، در این صورت این تابع به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(t-kT)$$

در این صورت تبدیل لاپلاس تابع فوق بصورت:

$$F(s) = F_1(s) + e^{-Ts}F_1(s) + e^{-2Ts}F_1(s) + \dots + e^{-KTs}F_1(s) = F_1(s)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = F_1(s)\frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

می‌باشد. پس اگر تبدیل لاپلاس $F_1(s)$ را در عامل $\frac{1}{1-e^{-Ts}}$ ضرب کنیم که در آن T دورهٔ تناوب $f(t)$ است، تبدیل لاپلاس $F(s)$ را بدست می‌آوریم. همچنین می‌توان گفت که اگر در تبدیل لاپلاس هر تابعی عامل ضربی به صورت $\frac{1}{1-e^{-Ts}}$ وجود داشته باشد، این عامل نشانگر متناوب بودن تابع داده شده است و می‌توان بدون در نظر گرفتن این عامل از بقیهٔ آن عکس تبدیل لاپلاس گرفت و مؤلفهٔ اصلی $f_1(t)$ را بدست آورده و تابع $f(t)$ مورد نظر را از تکرار $f_1(t)$ در فواصل زمانی T، $2T$، ... ، kT، ... بدست آورد.

جدول تبدیل لاپلاس توابع مهم

$f(t)$	$F(s)\underline{\underline{\Delta}}\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	$f(t)$	$F(s)\underline{\underline{\Delta}}\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
$\delta(t)$	1	$Sin\beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
$\delta^{(n)}(t)$	$s^n \quad (n=1,2,\dots)$	$e^{-at}Cos\beta t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}$
$Au(t)$	$\frac{A}{s}$	$e^{-at}Sin\beta t$	$\frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{t^n}{n!}e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad n=1,2,\dots$	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$
$Cos\beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(s)ds$

مثال ۲ تبدیل لاپلاس $f(t)=e^{-3t}+e^{-2t}\cos 4t+\frac{\sin t}{t}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{s+3}+\frac{s}{s^2+16}+Arc\tan(\frac{s}{2})$

۲) $\frac{1}{s+3}+\frac{s+2}{(s+2)^2+16}+\frac{\pi}{2}-Arc\tan(s)$

۳) $\frac{1}{s+2}+\frac{2}{(s+2)^2+16}+\frac{s}{s^2+1}$

۴) $\frac{1}{s+3}+\frac{s+2}{(s+2)^2+16}+\frac{1}{s^2+1}$

جواب مثال ۲: گزینه (۲) صحیح است. تبدیل لاپلاس تک‌تک توابع را در حوزه لاپلاس محاسبه کرده و با همدیگر جمع می‌کنیم:

$$f_1=e^{-3t}\rightarrow F_1(s)=\frac{1}{s+3}$$

$$f_2=e^{-2t}\cos 4t\xrightarrow{\text{قضیه شیفت فرکانسی}}L\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)\rightarrow F_2(s)=\frac{s+2}{(s+2)^2+16}$$

$$f_3=\frac{\sin t}{t}\rightarrow L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty}F(s)ds\rightarrow F_3(s)=\int_s^{\infty}\frac{ds}{s^2+1}=Arc\tan(\frac{s}{1})\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-Arc\tan(s)$$

پس داریم:

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+F_3(s)=\frac{1}{s+3}+\frac{s+2}{(s+2)^2+16}+\frac{\pi}{2}-Arc\tan(s)$$

مثال ۳: تبدیل لاپلاس $f(t)=t\cos t+u(t-2)+\sin(2t-3)$ کدام است؟

۱) $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}+\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-1/5s}}{s^2+1}$	۲) $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}+\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{2e^{-1/5s}}{s^2+4}$
۳) $\frac{s}{s^2+1}+\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-1/5s}}{s^2+1}$	۴) $\frac{s}{s^2+1}+\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{2e^{-1/5s}}{s^2+4}$

جواب مثال ۳: گزینه (۲) صحیح است. تبدیل لاپلاس تک‌تک توابع را محاسبه کرده و با همدیگر جمع می‌کنیم.

$$f_1=t\cos t\rightarrow L\left\{tf(t)\right\}=-\frac{dF}{ds}\Rightarrow F_1(s)=-\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+1})=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

$$f_2=u(t-2)\xrightarrow{\text{قضیه شیفت زمانی}}L\left\{f(t-a)\right\}=e^{-as}F(s)\rightarrow F_2(s)=e^{-2s}\times\frac{1}{s}=\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$f_3 = \sin(2t-3) = \sin 2(t-\frac{3}{2}) \xrightarrow{\text{قضیه شیفت زمانی}} F_3(s) = e^{-\frac{3}{2}s} \times \frac{2}{s^2+4}$$

پس داریم:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{2e^{-1/5s}}{s^2+4}$$

مثال ۴: هر گاه $y''-2y'+y=t$ و $y'(0)=1$, $y(0)=0$ باشد تبدیل لاپلاس $y(t)$ کدام است؟

۱) $\frac{s^2+1}{s^2(s^2-2s+1)}$ ۲) $\frac{s^2}{s^2(s^2-2s+1)}$

۳) $\frac{s^2}{s^2(s^2+2s+1)}$ ۴) $\frac{s^2+1}{s^2(s^2+2s+1)}$

جواب مثال ۴: گزینه (۱) صحیح است. از طرفین معادله دیفرانسیل $y''-2y'+y=t$ تبدیل لاپلاس می‌گیریم پس داریم:

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - 2[sY - y(0)] + Y = \frac{1}{s^2} \xrightarrow[y'(0)=1]{y(0)=0} Y[s^2-2s+1] = \frac{1}{s^2}+1$$

$$\to Y = \frac{s^2+1}{s^2(s^2-2s+1)}$$

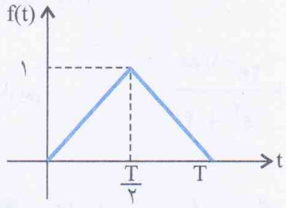
مثال ۵: اگر تبدیل لاپلاس f(t) به صورت $F(s)=\frac{2s+5}{s^2+2s}$ باشد مقدار $f(0)+f(\infty)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۰/۵

جواب مثال ۵: گزینه (۳) صحیح است. بر طبق قضیه مقدار اولیه و قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{(2s+5)s}{s^2+2s} = 2 \\ f(\infty) &= \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{(2s+5)s}{s^2+2s} = \frac{s(2s+5)}{s(s+2)} = \frac{5}{2} = 2/5 \end{aligned}\right\} f(0)+f(\infty) = 4/5$$

مثال ۶ تبدیل لاپلاس موج $f(t)$ شکل مقابل کدام است؟



۱) $\dfrac{۳}{Ts^{۲}}\left[۱+۲e^{-\frac{Ts}{۲}}-e^{-Ts}\right]$

۲) $\dfrac{۲}{Ts^{۲}}\left[۱-۲e^{\frac{-Ts}{۲}}+e^{-Ts}\right]$

۳) $\dfrac{۲}{Ts}\left[-۲+۲e^{-t}+۲e^{-۲t}\right]$

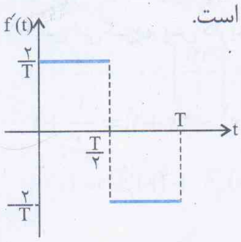
۴) هیچکدام

جواب مثال ۶: گزینه «۲» صحیح است.

اگر بخواهیم مستقیماً تبدیل لاپلاس $f(t)$ را محاسبه کنیم، باید تابع $f(t)$ را بنوسیم پس داریم:

$$f(t)=\frac{۲}{T}t\left[u(t)-u(t-\frac{T}{۲})\right]+\left[-\frac{۲}{T}t+۲\right]\left[u(t-\frac{T}{۲})-u(t-T)\right]$$

می‌بینیم که محاسبه تبدیل لاپلاس تابع فوق مشکل است. پس بجای اینکه از $f(t)$ تبدیل لاپلاس بگیریم، ابتدا از مشتق آن تبدیل لاپلاس می‌گیریم. تابع $f'(t)$ بصورت زیر است.



$$\rightarrow f'(t)=\frac{۲}{T}\left[u(t)-u(t-\frac{T}{۲})\right]-\frac{۲}{T}\left[u(t-\frac{T}{۲})-u(t-T)\right]$$

$$\rightarrow f'(t)=\frac{۲}{T}\left[u(t)-۲u(t-\frac{T}{۲})+u(t-T)\right]$$

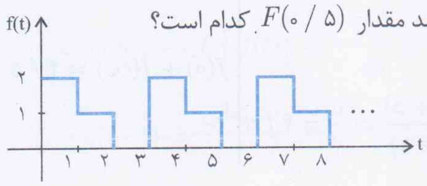
تبدیل لاپلاس $f'(t)$ را $F_۱(s)$ می‌نامیم پس داریم:

$$F_۱(s)=\frac{۲}{T}\left[\frac{۱}{s}-\frac{۲e^{\frac{-T}{۲}s}}{s}+\frac{e^{-Ts}}{s}\right]$$

همچنین $F(s)=\dfrac{F_۱(s)}{s}$ است پس:

$$F(s)=\frac{۲}{Ts^{۲}}\left[۱-۲e^{\frac{-Ts}{۲}}+e^{-Ts}\right]$$

مثال ۷ اگر $F(s)$، تبدیل لاپلاس شکل موج $f(t)$ باشد مقدار $F(۰/۵)$ کدام است؟



۱) ۲/۶۴
۲) ۳/۶۴
۳) ۵/۴۳
۴) ۶/۴۳

جواب مثال ۷: گزینه «۱» صحیح است.

دوره تناوب شکل موج $f(t)$ برابر با $T = ۳$ است. شکل موج حوزهٔ زمان برای یک دوره تناوب به صورت زیر قابل بیان است.

$$f_۱(t) = ۲u(t) - u(t-۱) - u(t-۲)$$

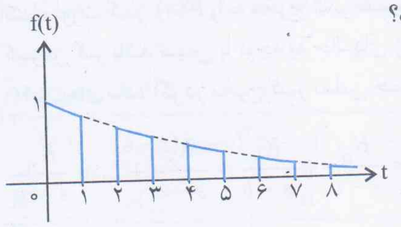
با گرفتن تبدیل لاپلاس از این رابطه داریم:

$$F_۱(s) = \frac{۲}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-۲s}}{s} = \frac{۲-(e^{-s}+e^{-۲s})}{s}$$

$$F(s) = \frac{F_۱(s)}{۱-e^{-sT}} = \frac{\frac{۲-(e^{-s}+e^{-۲s})}{s}}{۱-e^{-۳s}} = \frac{۲-(e^{-s}+e^{-۲s})}{s(۱-e^{-۳s})}$$

$$F(۰/۵) = \frac{۲-(e^{-۰/۵}+e^{-۱})}{۰/۵(۱-e^{-۱/۵})} = \frac{۲/۰۵}{۱-e^{-۱/۵}} = ۲/۶۳۸ \simeq ۲/۶۴$$

مثال ۸: تابع f(t) نشان داده شده در شکل زیر یک قطار پالس است که سطح بالایی آنها پوشی به صورت $e^{-\frac{t}{۲}}$ دارد مقدار $F(s=۰)$ کدام است؟



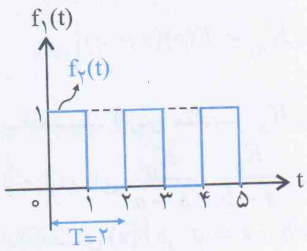
۱) $\frac{۲}{۱+e^{-۱}}$

۲) $\frac{۲}{۱+e^{-۲}}$

۳) صفر

۴) $\frac{۲}{۱+e^{-\frac{۱}{۲}}}$

جواب مثال ۸: گزینه «۴» صحیح است.



تابع f(t) حاصل‌ضرب تابع $f_۱(t)$ در $e^{-\frac{t}{۲}}$ می‌باشد. شکل موج تابع $f_۱(t)$ به صورت مقابل می‌باشد:

همانطور که از شکل پیداست، $f_۱(t)$ تابعی پریودیک با دوره تناوب $T = ۲$ می‌باشد. معادله شکل موج برای یک دوره تناوب $(f_۲(t))$ به صورت زیر قابل بیان است:

$$f_۲(t) = u(t) - u(t-۱)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از این رابطه داریم:

$$F_۲(s) = \frac{۱}{s} - \frac{e^{-s}}{s} = \frac{۱}{s}(۱-e^{-s})$$

پس داریم:

$$F_۱(s) = \frac{F_۲(s)}{۱-e^{-sT}} = \frac{\frac{۱}{s}(۱-e^{-s})}{۱-e^{-۲s}} = \frac{۱}{s(۱+e^{-s})}$$

حال:

$$f(t)=e^{-\frac{t}{۲}}f_۱(t)\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}}F(s)=F_۱(s+\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{(s+\frac{۱}{۲})(۱+e^{-(s+\frac{۱}{۲})})}$$

پس داریم:

$$F(\circ)=\frac{۲}{۱+e^{-\frac{۱}{۲}}}$$

۳- عکس تبدیل لاپلاس

واضح است که یک مسئله پیچیده، به یک تبدیل لاپلاس پیچیده منجر می‌گردد. یعنی، یک تابع گویای پیچیده‌تری از s حاصل می‌شود. بسیاری از این گونه تبدیلها، مستقیماً در جدول های تبدیل لاپلاس دیده نمی‌شوند، لیکن به راحتی می‌توان تابع زمانی متناظر را با تقلیل دادن تابع آن به اجزای ساده‌تری که تبدیل لاپلاس آنها در جدول دیده می‌شوند، بدست آورد.

برای تجزیهٔ هر تابع گویا به جزءهای ساده، یک روش عمومی وجود دارد که این روش، گسترش به صورت کسرهای جزئی نامیده می‌شود. تابع گویای زیر را در نظر بگیرید.

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{b_\circ s^m+b_۱s^{m-۱}+\dots+b_{m-۱}s+b_m}{a_\circ s^n+a_۱s^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}s+a_n}$$

ابتدا صورت کسر $F(s)$ را به مخرج کسر تقسیم می‌کنیم به طوری که درجه مخرج کسر از درجه صورت کسر بزرگتر باشد سپس با توجه به حالتهای زیر، عکس تبدیل لاپلاس هر کسر را بدست می‌آوریم:

۱) قطب های ساده: اگر در مخرج کسر تمامی جملات دارای توان مرتبه اول باشند یا به عبارتی داشته باشیم:

$$F(s)=\frac{X(s)}{Y(s)}=\frac{X(s)}{(s-a)(s-b)(s-c)\dots(s-n)}=\frac{K_a}{s-a}+\frac{K_b}{s-b}+\frac{K_c}{s-c}+\dots+\frac{K_n}{s-n}$$

که در آن:

$$K_a=F(s)(s-a)\Big|_{s=a}\ ,\quad K_b=F(s)(s-b)\Big|_{s=b},\dots,K_n=F(s)(s-n)\Big|_{s=n}$$

با بدست آوردن مقادیر $K_n,\dots,K_c,K_b,K_a$ براحتی می‌توان عکس تبدیل لاپلاس هر یک از عبارتهای $\frac{K_a}{s-a}$ ، $\frac{K_b}{s-b}$ ، .... ، $\frac{K_n}{s-n}$ را محاسبه نمود. ضرایب $K_n,\dots,K_c,K_b,K_a$ را مانده‌های F(s) در $s=a$ ، $s=b$ ، $s=c$ می‌نامند. عکس تبدیل لاپلاس $F(s)$ بصورت $K_ae^{at}+K_be^{bt}+\dots+K_ne^{nt}$ می‌باشد.

مثال ۹ عکس تبدیل لاپلاس $F(s)=\frac{۲s^۲-۴}{(s-۲)(s+۱)(s-۳)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}e^{۲t}-\frac{۱}{۶}e^{-t}+\frac{۷}{۲}e^{۳t}$

۲) $\frac{۴}{۳}e^{۲t}+\frac{۱}{۶}e^{-t}+\frac{۷}{۲}e^{۳t}$

۳) $-\frac{۴}{۳}e^{۲t}-\frac{۱}{۶}e^{-t}-\frac{۷}{۲}e^{۳t}$

۴) $\frac{۴}{۳}e^{۲t}+\frac{۱}{۶}e^{-t}-\frac{۷}{۲}e^{۳t}$

جواب مثال ۹: گزینه (۱) صحیح است.

$$F(s)=\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}=\frac{K_a}{(s-2)}+\frac{K_b}{(s+1)}+\frac{K_c}{(s-3)}$$

$$K_a=F(s)(s-2)\Big|_{s=2}=\frac{2(2)^2-4}{(2+1)(2-3)}=\frac{8-4}{3\times(-1)}=\frac{-4}{3}$$

$$K_b=F(s)(s+1)\Big|_{s=-1}=\frac{2(-1)^2-4}{(-1-2)(-1-3)}=\frac{2-4}{-3\times(-1-3)}=\frac{2-4}{-3\times-4}=\frac{-1}{6}$$

$$K_c=F(s)(s-3)\Big|_{s=3}=\frac{2(+3)^2-4}{(3-2)(3+1)}=\frac{18-4}{1\times4}=\frac{7}{2}$$

$$F(s)=\frac{-\frac{4}{3}}{s-2}+\frac{-\frac{1}{6}}{s+1}+\frac{\frac{7}{2}}{s-3}\rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=-\frac{4}{3}e^{2t}-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{7}{2}e^{3t}$$

۲) قطب های مکرر: درصورتی که پس از بسط به کسرهای جزئی، مخرج کسر دارای جملاتی بالاتر از مرتبه یک باشد یا به عبارتی

$$F(s)=\frac{X(s)}{Y(s)}=\frac{X(s)}{(s-a)(s-b)^2(s-c)^3\ldots(s-n)^n}=\frac{k_a}{(s-a)}+\frac{k_b}{(s-b)^2}+\frac{k'_b}{(s-b)}+\frac{k_c}{(s-c)^3}$$

$$+\frac{K'_c}{(s-c)^2}+\frac{K''_c}{(s-c)}+\ldots+\frac{K_n}{(s-n)^n}+\frac{K'_n}{(s-n)^{n-1}}+\frac{K''_n}{(s-n)^{n-2}}+\ldots+\frac{K_n^n}{(s-n)}$$

که داریم:

$$K_a=F(s)(s-a)\big|_{s=a}$$

$$k_b=F(s)(s-b)^2\big|_{s=b}\qquad K'_b=\frac{d}{ds}[F(s)(s-b)^2]\big|_{s=b}$$

$$K_c=F(s)(s-c)^3\Big|_{s=c},\ K'_c=\frac{d}{ds}\Big[F(s)(s-c)^3\Big]\Big|_{s=c},K''_c=\frac{d^2}{2ds^2}\Big[F(s)(s-c)^3\Big]\Big|_{s=c},$$

$$K_n=\Big[F(s)(s-n)^n\Big]\Big|_{s=n},K'_n=\frac{d}{ds}\Big[F(s)(s-n)^n\Big]\Big|_{s=n},\ldots,K_n^n=\frac{d^n}{n!\,ds^n}\Big[F(s)(s-n)^n\Big]\Big|_{s=n}$$

مثال ۱۰: عکس تبدیل لاپلاس $F(s)=\dfrac{s^{2}+3s+5}{(s+1)^{2}(s+2)}$ کدام است؟

۱) $-6e^{-2t}+te^{-t}-2e^{-t}$
۲) $3e^{-2t}+3te^{-t}-2e^{-t}$
۳) $6e^{-2t}+te^{-t}-e^{-t}$
۴) $-3e^{-2t}-3te^{-t}-2e^{-t}$

جواب مثال ۱۰: گزینه (۲) صحیح است.

$$F(s)=\frac{s^{2}+3s+5}{(s+1)^{2}(s+2)}=\frac{k_a}{s+2}+\frac{k_b}{(s+1)^{2}}+\frac{k_b'}{(s+1)}$$

$$k_a=F(s)(s+2)\Big|_{s=-2}=\frac{(-2)^{2}+3(-2)+5}{(-2+1)^{2}}=\frac{4-6+5}{1}=3$$

$$k_b=F(s)(s+1)^{2}\Big|_{s=-1}=\frac{(-1)^{2}+3(-1)+5}{(-1+2)}=\frac{1-3+5}{1}=3$$

$$k_b'=\frac{d}{ds}\Big[F(s)(s+1)^{2}\Big]\Big|_{s=-1}=\frac{d}{ds}\left[\frac{s^{2}+3s+5}{s+2}\right]\Big|_{s=-1}$$

$$=\frac{(2s+3)(s+2)-(s^{2}+3s+5)}{(s+2)^{2}}\Big|_{s=-1}=\frac{1-3}{1}=-2$$

$$\rightarrow F(s)=\frac{3}{s+2}+\frac{3}{(s+1)^{2}}+\frac{-2}{(s+1)}\rightarrow f(t)=L^{-1}\big[F(s)\big]=3e^{-2t}+3te^{-t}-2e^{-t}$$

۳) قطب‌های مختلط: فرض کنیم مخرج کسر، پس از بسط به کسرهای جزئی، دارای جملات مختلط باشد، یا به عبارتی:

$$\rightarrow F(s)=\frac{X(s)}{(s+a)^{2}+b^{2}}=\frac{k_1 s+k_2}{(s+a)^{2}+b^{2}}$$

چون در مخرج کسر $(s+a)$ بتوان ۲ داریم باید در صورت کسر عبارت $(s+a)$ درست کنیم پس صورت کسر بصورت زیر ساده می‌گردد.

$$F(s)=\frac{k_1(s+a)-k_1a+k_2}{(s+a)^{2}+b^{2}}=\frac{k_1(s+a)}{(s+a)^{2}+b^{2}}+\frac{k_2-k_1a}{(s+a)^{2}+b^{2}}$$

$$f(t)=k_1e^{-at}\cos bt+\frac{k_2-k_1a}{b}e^{-at}\sin bt$$

مثال ۱۱: عکس تبدیل لاپلاس عبارت $F(s)=\dfrac{s^{2}+3s+7}{\left[(s+2)^{2}+4\right](s+1)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 2t - e^{-t}$ ۲) $-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 2t + e^{-t}$

۳) $\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t + e^{-t}$ ۴) $-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t + e^{-t}$

جواب مثال ۱۱: گزینه (۴) صحیح است.

$$F(s)=\frac{s^2+3s+7}{[(s+2)^2+4](s+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{k_1 s+k_2}{(s+2)^2+4}$$

$$A=\lim_{s\to -1}(s+1)F(s)=\frac{1-3+7}{1+4}=1$$

$$F(s)=\frac{s^2+3s+7}{[(s+2)^2+4](s+1)}=\frac{1}{s+1}+\frac{k_1 s+k_2}{(s+2)^2+4}=\frac{(s+2)^2+4+(k_1 s+k_2)(s+1)}{(s+1)[(s+2)^2+4]}$$
$$\to s^2+3s+7=(s+2)^2+4+(k_1 s+k_2)(s+1)$$

$$=(k_1+1)s^2+(k_1+k_2+4)s+8+k_2 \to \begin{cases} k_1=0 \\ k_2=-1 \end{cases}$$

$$\to F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{(s+2)^2+4}\to f(t)=e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t$$

مثال ۱۲: عکس تبدیل لاپلاس $F(s)=\frac{4e^{-2s}}{1+e^{-3s}}$ تابع $f(t)$ است. $\frac{f(3)-f(6)}{2}$ کدام است؟

۱) $+2$ ۲) 0 ۳) 4 ۴) -1

جواب مثال ۱۲: گزینه «۲» صحیح است.

$$F(s)=\frac{4e^{-2s}}{1+e^{-3s}}=\frac{4e^{-2s}}{1+e^{-3s}}\times\frac{1-e^{-3s}}{1-e^{-3s}}=\frac{4e^{-2s}(1-e^{-3s})}{1-e^{-6s}}\Rightarrow F(s)=\frac{4e^{-2s}-4e^{-5s}}{1-e^{-6s}}=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

تابع $f(t)$ حالت پریودیک تابع $f_1(t)$ با دوره تناوب $T=6$ می‌باشد که $F_1(s)$ تبدیل لاپلاس $f_1(t)$ می‌باشد پس:

$$F_1(s)=4e^{-2s}-4e^{-5s}\to f_1(t)=\mathcal{L}^{-1}F_1(s)=4\delta(t-2)-4\delta(t-5)$$

پس f(t) دارای دوضربه در $t=2,5$ و با $T=6$ متناوب است ومقدار f(t) در $t=3,6$ برابر صفر می‌باشد

$$\begin{matrix} f(3)=0 \\ f(6)=0 \end{matrix}\to \frac{f(3)-f(6)}{2}=\frac{0}{2}=0$$

۴- مبانی مدارهای خطی و تغییر ناپذیر با زمان

۴-۱-۱- مفاهیمی در مورد پاسخ حالت صفر، پاسخ ورودی صفر و پاسخ کامل (یادآوری)

- پاسخ یا خروجی یک مدار را پاسخ حالت صفر آن مدار می‌نامیم، هرگاه مدار قبل از اعمال ورودی در حالت صفر بوده باشد.
- پاسخ یا خروجی یک مدار را پاسخ ورودی صفر آن مدار می‌نامیم هرگاه ورودی مدار صفر بوده و پاسخ ناشی از شرایط اولیه باشد.
- پاسخ کامل نیز عبارت است از: مجموع دو پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر.

پس در حالت کلی داریم:

پاسخ حالت صفر، یک تابع خطی از ورودی و پاسخ ورودی صفر، یک تابع خطی از حالت اولیه می‌باشد.

۴-۱-۲- نمایش ورودی - خروجی (معادله دیفرانسیل مرتبه n ام) و محاسبه پاسخ حالت صفر، پاسخ ورودی صفر، پاسخ هموژن و پاسخ خصوصی

در حالت کلی برای مدارهای خطی و تغییرناپذیر با زمان با یک ورودی و یک خروجی، معادله دیفرانسیل مرتبه n ام که رابطهٔ بین ورودی و خروجی را تعیین می‌کند، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_n y=b_0\frac{d^m w}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}w}{dt^{m-1}}+\ldots+b_m w$$

که y خروجی مدار، w ورودی مدار و مقادیر ثابت a_1، a_2، ...، a_n، b_0، b_1، .... و b_n، مربوط به مقادیر المان‌ها و توپولوژی مدار می‌باشند.

• **تذکر:** پاسخ ورودی صفر مدار با صفر قرار دادن سمت راست معادلهٔ فوق محاسبه می‌گردد. در نتیجه معادله دیفرانسیل به یک معادله همگن تبدیل شده که معادله مشخصه آن در حالت کلی از مرتبه n بوده و به صورت روبرو است: $s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$

ریشه‌های این چند جمله‌ای فرکانس‌های طبیعی مدار هستند. چنانچه می‌دانیم به ازای هر فرکانس طبیعی یک مقدار ثابت وجود دارد. در حالت کلی اگر تمام ریشه‌های این معادله مشخصه متمایز بوده و تکراری نباشد، جواب معادله همگن به صورت کلی زیر است.

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t}$$

پس پاسخ ورودی صفر مدار بصورت $\left(y(0)=y_{0_1}\ ,\ \frac{dy_0}{dt}=y_{0_2}\neq 0,\ldots\right)$ $y_2(t)=\sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t}$ می‌باشد.

ولی جواب پاسخ حالت صفر مدار بصورت $\left(y(0)=0, y'(0)=0,\ldots\right)$ $y_1(t)=\sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t}+y_p(t)$

می‌باشد که $y_p(t)$ پاسخ خصوصی معادله است و تنها به ورودی بستگی دارد. جمله $y_p(t)$ هر پاسخ خصوصی می‌تواند باشد یعنی هر جوابی که در معادله دیفرانسیل ناهمگن صدق کند. بطور مثال برای ورودی پله واحد، $y_p(t)$ برابر یک عدد ثابت خواهد بود، برای ورودی سینوسی، y_p به صورت یک سینوسی با همان فرکانس ورودی است. در حالت کلی برای یک ورودی که شامل یک چند جمله‌ای از

t باشد، y_p نیز یک چندجمله ای از t با همان درجه است.
حال جواب کامل مجموع دو جواب پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر است.
از طرفی جواب کامل یک معادله دیفرانسیل، برابر مجموع جواب همـوزن و جواب خصوصی معادله می‌باشد که بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \text{پاسخ کامل } y(t) = y_h(t) + y_p(t) \\ y(\circ) = y_{\circ_1} \\ \dfrac{dy(\circ)}{dt} = y_{\circ_2} \\ \vdots \end{cases}$$

که $y_h(t)$ پاسخ هموزن معادله و $y_p(t)$ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل می‌باشد.

مثال ۱۳: پاسخ کامل یک مدار الکتریکی خطی و تغییرناپذیر با زمان به ورودی پله واحد به ازاء دو دسته شرایط اولیه مختلف X_1 و X_2 به صورت زیر است.

$$X_1(\circ) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow y_1 = (\circ/5e^{-2t} + 2e^{-3t} + \circ/5)u(t)$$

$$X_2(\circ) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow y_2 = (2/5e^{-2t} + 6e^{-3t} + \circ/5)u(t)$$

پاسخ مدار فوق به ورودی $4\sqrt{2}\sin 2t$ و شرایط اولیه $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ کدام است؟

۱) $(3e^{-2t} + 6e^{-3t})u(t) + 2\sin(2t - 45)$

۲) $(3e^{-2t} + 6e^{-3t})u(t) + 2\sin(2t - 135)$

۳) $(-3e^{-2t} - 6e^{-3t})u(t) + 2\sin(2t - 45)$

۴) $-3e^{-2t} - 6e^{-3t} + 2\sin(2t - 135)$

جواب مثال ۱۳: گزینه (۱). پاسخ کامل در یک مدار خطی و نامتغیر با زمان به صورت زیر است.

پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر = پاسخ کامل

(y_z = پاسخ ناشی از شرایط اولیه) + (y_s = پاسخ ناشی از ورودی) = پاسخ کامل

$$X_1(\circ) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{شرایط اولیه } X_1]{\text{پاسخ به ورودی پله و}} y_1(t) = (\circ/5e^{-2t} + 2e^{-3t} + \circ/5)u(t) = y_{s_1} + y_{z_1}$$

$$X_2(\circ) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{شرایط اولیه } X_2]{\text{پاسخ به ورودی پله و}} y_2(t) = (2/5e^{-2t} + 6e^{-3t} + \circ/5)u(t) = y_{s_2} + y_{z_2}$$

چون ورودی هر دو پله است، پس پاسخ ناشی از ورودی (y_s) هر دو برابر است $(y_{s_1} = y_{s_2})$ پس داریم:

$$y_1 = y_{s_2} + y_{z_1}$$

$$y_2 = y_{s_2} + y_{z_2}$$

چون $X_{۲}(۰) = ۳X_{۱}(۰)$ می‌باشد پس پاسخ ناشی از شرایط اولیه (y_z) آنها نیز بصورت $y_{z_۲} = ۳y_{z_۱}$ می‌باشد پس داریم:

$$\begin{matrix} y_۱ = y_{s_۲} + y_{z_۱} \\ y_۲ = y_{s_۲} + y_{z_۲} \end{matrix} \xrightarrow{y_{z_۲}=۳y_{z_۱}} \begin{cases} y_۱ = y_{s_۲} + y_{z_۱} \\ y_۲ = y_{s_۲} + ۳y_{z_۱} \end{cases} \rightarrow y_۲ - y_۱ = ۲y_{z_۱}$$

پس طبق فرمول بالا داریم:

$$y_۲ - y_۱ = ۲y_{z_۱} \xrightarrow[y_۱=(۰/۵e^{-۲t}+۲e^{-۳t}+۰/۵)u(t)]{y_۲=(۲/۵e^{-۲t}+۶e^{-۳t}+۰/۵)u(t)} ۲y_{z_۱} = (۲e^{-۲t} + ۴e^{-۳t})u(t)$$

$$\rightarrow y_{z_۱} = (e^{-۲t} + ۲e^{-۳t})u(t)$$

پس می‌توان پاسخ ناشی از ورودی پله واحد را بصورت زیر محاسبه کرد:

$$y_۱ = y_{s_۱} + y_{z_۱} \rightarrow y_{s_۱} = y_۱ - y_{z_۱} \xrightarrow[y_{z_۱}=(e^{-۲t}+۲e^{-۳t})u(t)]{y_۱=(۰/۵e^{-۲t}+۲e^{-۳t}+۰/۵)u(t)}$$

$$y_{s_۱} = (-۰/۵e^{-۲t} + ۰/۵)u(t)$$

حال پاسخ ضربه مدار خطی برابر مشتق پاسخ پله است پس داریم

$$h(t) = \frac{dy_{s_۱}}{dt} = \frac{d}{dt}(-۰/۵e^{-۲t} + ۰/۵)\,u(t) = e^{-۲t}u(t) \rightarrow H(s) = \frac{۱}{s+۲}$$

حال پاسخ مدار به ورودی $۴\sqrt{۲}\sin ۲t$ و شرایط اولیه $\begin{pmatrix} ۳ \\ ۳ \end{pmatrix}$ را می‌توان به صورت حاصل جمع پاسخ ناشی از شرایط اولیه $\begin{pmatrix} ۳ \\ ۳ \end{pmatrix}$ و پاسخ ناشی از ورودی $۴\sqrt{۲}\sin ۲t$ تعریف کرد $y_۳ = y_{s_۳} + y_{z_۳}$، چون شرایط اولیه در این حالت ۳ برابر شرایط اولیه در حالت اول است پس

$$y_{z_۳} = ۳y_{z_۱} = ۳\left(e^{-۲t} + ۲e^{-۳t}\right)$$

ولی در مورد پاسخ ناشی از ورودی $۴\sqrt{۲}\sin ۲t$ داریم:

$$y_{s_۳} = H(s).X(s) = \frac{۱}{s+۲} \times (\text{فازور ورودی})\Big|_{s=۲j} = \frac{۱}{۲j+۲} \times ۴\sqrt{۲}\angle ۰ = \frac{۴\sqrt{۲}\angle ۰}{۲\sqrt{۲}\angle ۴۵} = ۲\angle -۴۵$$

$$\rightarrow y_{s_۳} = ۲\sin(۲t - ۴۵)$$

پس داریم:

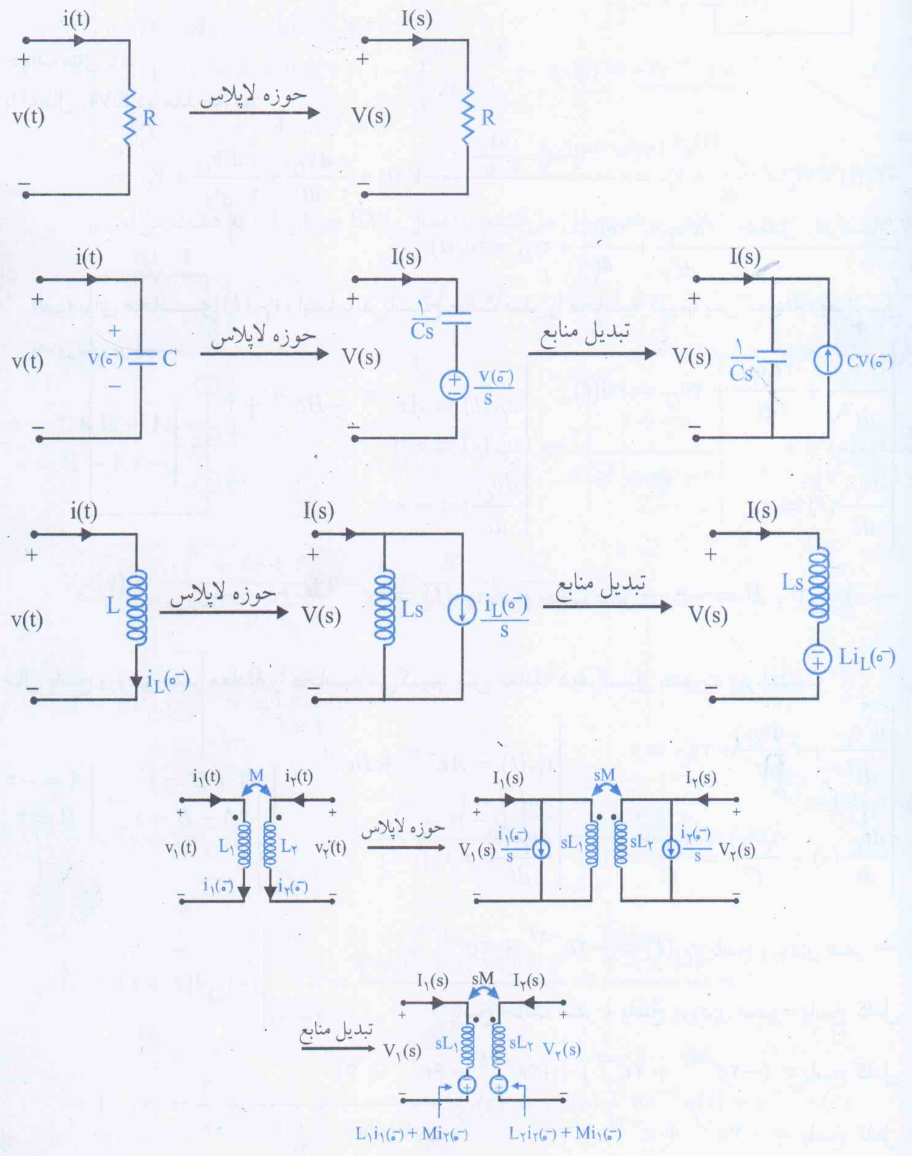
$$y_۳ = y_{s_۳} + y_{z_۳} = ۳\left(e^{-۲t} + ۲e^{-۳t}\right) + ۲\sin(۲t - ۴۵) = ۳e^{-۲t} + ۶e^{-۳t} + ۲\sin(۲t - ۴۵)$$

۴-۲- کاربرد تبدیل لاپلاس در مدارهای الکتریکی

تبدیل لاپلاس یکی از بهترین روش‌های تحلیل مدار است. در واقع با این روش می‌توان پاسخ ماندگار و پاسخ گذاری مدار را یکجا بدست آورد، شرایط اولیهٔ هر مداری را بدست آورد، حتی مدارهایی که در آنها ولتاژ خازنها یا جریان سلف‌ها تغییر ناگهانی دارد، معادلهٔ دیفرانسیل مدار را یافت و آن را حل کرد،

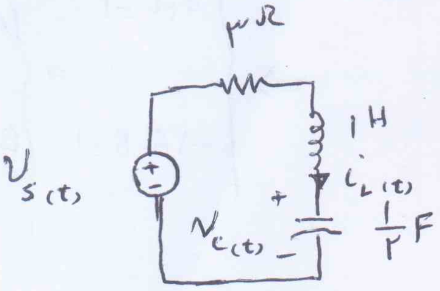
انتگرال کانولوشن را در بعضی موارد به صورتی بسیار ساده محاسبه کرد و ..
برای تحلیل مدار در حوزه لاپلاس، ابتدا المان‌های مدار را در حوزه لاپلاس مدل کرده، سپس با توجه به نوع مدار تحلیل مورد نظر را انجام می‌دهیم.

۴-۲-۱- مدل عناصر در حوزه زمان و حوزه لاپلاس



کاربرد تبدیل لاپلاس در مدارهای الکتریکی

مثال ۱- در مدار شکل زیر $v_{s(t)} = 3u_{(t)}$ ورودی مدار و $v_{c(t)}$ خروجی بوده و $v_{c(0)} = 1$ و $i_{L}(0) = \frac{1}{2}$ می‌باشد سپس جواب کامل را از طریق محاسبه:



الف- پاسخ حالت صفر + پاسخ ورودی صفر

ب- پاسخ همگن + پاسخ خصوصی

ج- پاسخ کامل از روش تبدیل لاپلاس بدست آورید.

جواب:

با اعمال KVL در مدار داریم:

$$-v_{s(t)} + 3i_L + 1\frac{di_L}{dt} + v_c = 0 \xrightarrow{i_L = i_c = \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}} -v_{s(t)} + \frac{3}{2}\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2v_c}{dt^2} + v_c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دیفرانسیل}} \frac{d^2v_c}{dt^2} + 3\frac{dv_c}{dt} + 2v_c = 2v_{s(t)}$$

الف- برای محاسبه $v_{c(t)}$، ابتدا باید پاسخ حالت صفر را حساب کنیم، پس معادله دیفرانسیل بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{d^2v_c}{dt^2} + 3\frac{dv_c}{dt} + 2v_c = 6u_{(t)} \\ v_{c(0)} = 0 \\ \frac{dv_c}{dt}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{c(t)} = Ae^{-2t} + Be^{-t} + 3 \\ v_{c(0)} = 0 \\ \frac{dv_c}{dt}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + 3 = 0 \\ -2A - B = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow A = 3 \quad , B = -6 \xrightarrow{\hspace{2cm}} \text{پاسخ حالت صفر} \quad v_{c(t)} = 3e^{-2t} - 6e^{-t} + 3$$

حال پاسخ ورودی صفر معادله را حساب می‌کنیم پس معادله دیفرانسیل بصورت زیر است

$$\begin{cases} \cancel{\frac{d^2v_c}{dt^2} + 3\frac{dv_c}{dt} + 2v_c} \\ v_{c(0)} = 1 \\ \frac{}{dv_c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v_c}{dt^2} + 3\dfrac{dv_c}{dt} + 2v_c = 0 \\ v_c(0) = 1 \\ \dfrac{dv_c}{dt}(0) = \dfrac{i_c(0)}{c} = \dfrac{i_L(0)}{c} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_c(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t} \\ v_c(0) = 1 \\ \dfrac{dv_c}{dt}(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \end{cases}$$

پاسخ ورودی صفر $\longrightarrow$ $v_c(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-t}$

پاسخ کامل = پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر

$$\text{پاسخ کامل} = (-2e^{-2t} + 3e^{-t}) + (3e^{-2t} - 6e^{-t} + 3) = -3e^{-t} + e^{-2t} + 3 \quad , \; t \geq 0$$

ب - پاسخ همگن و پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v_c}{dt^2} + 3\dfrac{dv_c}{dt} + 2v_c = 6u(t) \\ v_c(0) = 1 \\ \dfrac{dv_c}{dt}(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_c(t) = v_p(t) + v_h(t) \\ v_h(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} \\ v_p(t) = 3 \end{cases}$$

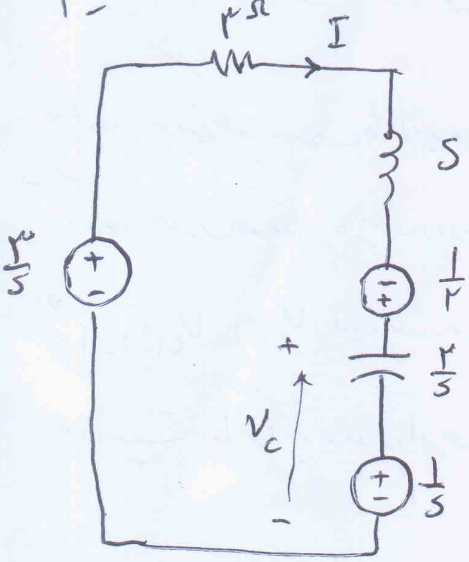
$$\Rightarrow \begin{cases} v_c(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + 3 \\ v_c(0) = 1 \Rightarrow A+B+3=1 \\ \dfrac{dv_c}{dt}(0) = 1 \Rightarrow -A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=1 \end{cases} \Rightarrow v_c(t) = \underbrace{-3e^{-t} + e^{-2t}}_{v_h(t)} \underbrace{+3}_{v_p(t)} \quad , \; t \geq 0$$

$v_h(t)$ (جواب همگن)

$v_p(t)$ (جواب خصوصی)

صفحه ۳

قسمت ج: مدار را به حوزه لاپلاس برده و مدل را رسم می‌کنیم با اعمال KVL جریان I را بدست می‌آوریم:



$$-\frac{3}{s}+3I+sI-\frac{1}{2}+\frac{2}{s}I+\frac{1}{s}=0$$

$$\rightarrow I=\frac{2+\frac{1}{2}s}{s^2+3s+2}$$

حال برای ولتاژ خازن داریم:

$$-V_c+\frac{2}{s}I+\frac{1}{s}=0 \Rightarrow V_c=\frac{2}{s}I+\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow V_c=\frac{2}{s}\left[\frac{2+\frac{1}{2}s}{s^2+3s+2}\right]+\frac{1}{s}=\frac{s^2+4s+6}{s(s^2+3s+2)}$$

$$V_{c(s)}=\frac{s^2+4s+6}{s(s^2+3s+2)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{(s+1)}+\frac{k_3}{s+2}$$

$$k_1=sV_{c(s)}\Big|_{s=0}=\frac{6}{1\times 2}=3$$

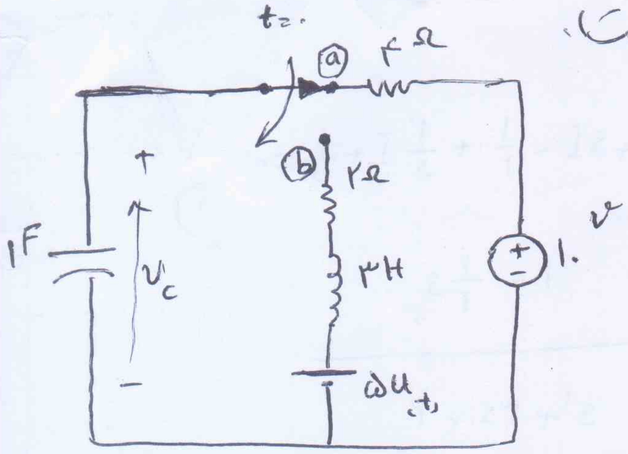
$$k_2=(s+1)V_{c(s)}\Big|_{s=-1}=\frac{(-1)^2+4(-1)+6}{(-1)(-1+2)}=\frac{1-4+6}{-1}=-3$$

$$k_3=(s+2)V_{c(s)}\Big|_{s=-2}=\frac{(-2)^2+4(-2)+6}{-2(-2+1)}=\frac{4-8+6}{2}=1$$

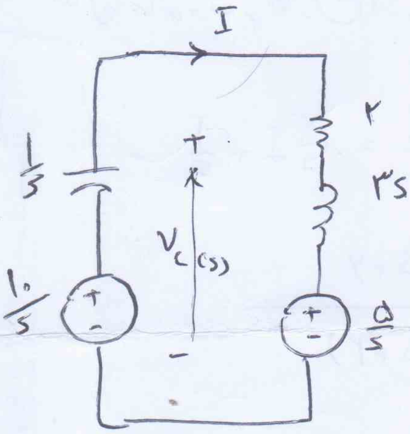
$$\Rightarrow V_{c(s)}=\frac{3}{s}+\frac{-3}{s+1}+\frac{1}{s+2} \Rightarrow \boxed{V_{c(t)}=\mathcal{L}^{-1}V_{c(s)}=3u_{(t)}-3e^{-t}u_{(t)}+e^{-2t}u_{(t)}}$$

صفحه ۴

مثال ۲- در مدار شکل زیر با تبدیل لاپلاس $v_c(t)$ را بیابید؟ (کلید قبل از زمان $t=0$ مدت طولانی در حالت a قرار داشته و در $t=0$ در وضعیت b قرار داده شده است.)



جواب: وقتی کلید مدت طولانی در وضعیت a باشد آنگاه خازن مدار باز شده و ولتاژ اولیه آن $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 10^v$ می‌باشد حال در $t>0$ کلید به وضعیت b می‌آید و مدار را در حوزه لاپلاس مدل کرده و با اعمال KVL داریم:



$$-\frac{10}{s} + \frac{1}{s}I + 2I + 3sI + \frac{5}{s} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{s} + 3s + 2\right)I = \frac{5}{s}$$

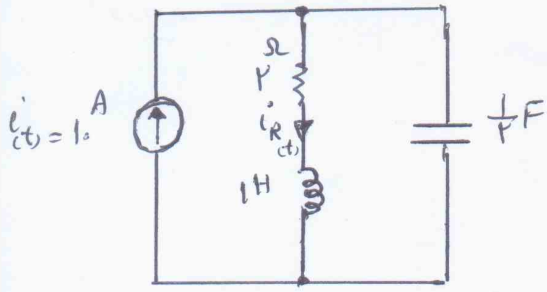
$$I = \frac{\frac{5}{s}}{\frac{1}{s} + 3s + 2} = \frac{5}{3s^2 + 2s + 1}$$

$$v_c(s) = \frac{10}{s} - \frac{I}{s} = \frac{10}{s} - \frac{5}{s(3s^2+2s+1)} = \frac{30s^2 + 20s + 5}{s(3s^2+2s+1)}$$

مثال: در مدار شکل زیر $v_C(0)=3^v$ و $i_L(0)=1^A$ میباشد معادله $I_{R(s)}$ را بدست آورید.

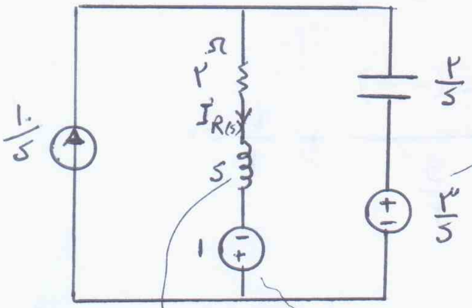
حل: ابتدا مدار شکل روبرو را به حوزه لاپلاس میبریم

پس خواهیم داشت:



$\Downarrow$ $v_C(0)=3^v$, $i_L(0)=1^A$

حوزه لاپلاس



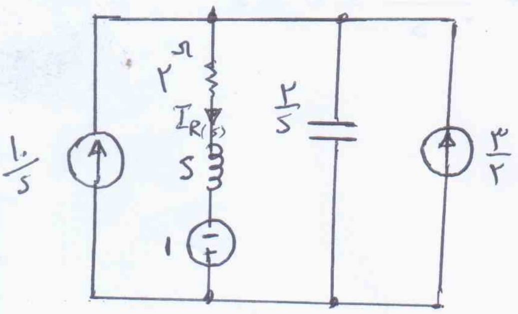
$$\frac{1}{Cs}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times s}=\frac{2}{s}$$

$$\frac{v_{C(0)}}{s}=\frac{3}{s}^{v}$$

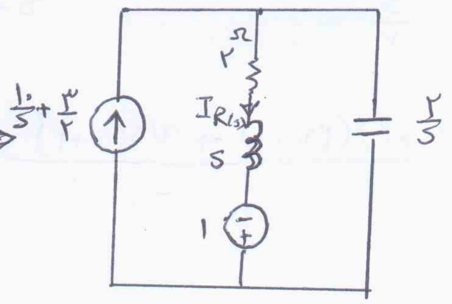
$$Li_{L(0)}=1\times 1=1^v$$

$$Ls=1\times s=s$$

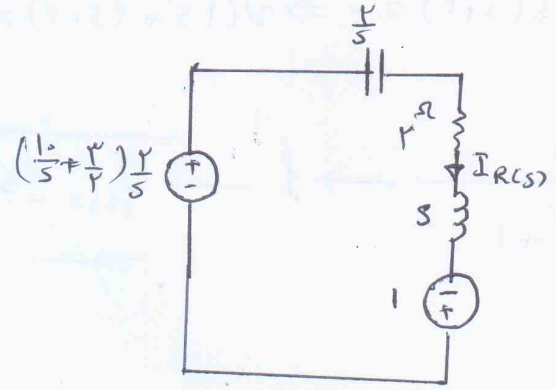
مدار معادل نورتن خازن سری با منبع ولتاژ را می‌نویسیم:



$\Rightarrow$



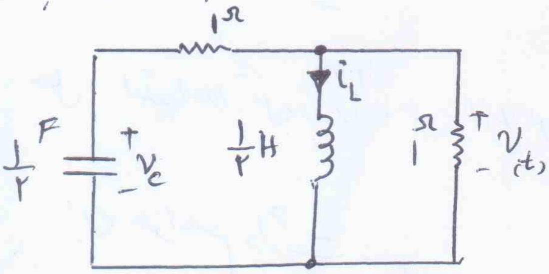
تبدیل منبع جریان و امپدانس خازن موازی به منبع ولتاژ و امپدانس خازن سری



$$I_{R(s)}=\frac{(\frac{10}{s}+\frac{3}{2})\frac{2}{s}+1}{\frac{2}{s}+2+s}$$

$$\Rightarrow I_{R(s)}=\frac{\frac{20}{s^2}+\frac{3}{s}+1}{\frac{2}{s}+2+s}=\frac{\frac{20+3s+s^2}{s^2}}{\frac{2+2s+s^2}{s}}=\boxed{\frac{s^2+3s+20}{s(s^2+2s+2)}}$$

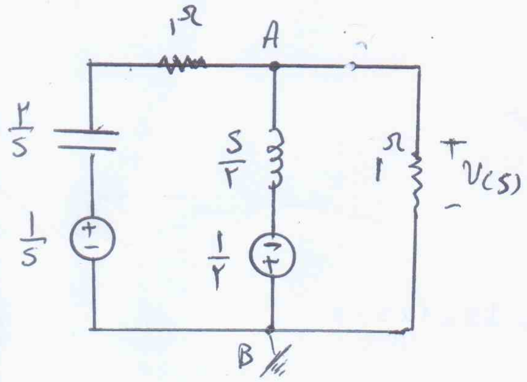
مثال: در مدار شکل زیر، $i_L(0)=1^A$ و $v_C(0)=1^V$ است، $v(t)$ را برای $t>0$ بدست آورید.



حل: مدار را به حوزه لاپلاس برده و شرایط اولیه ولتاژ خازن و جریان سلف را بصورت منبع ولتاژ در مدار مدل کنیم

با اعمال KCL در گره A داریم:

$V(s)=V_A$



$$\frac{V-\frac{1}{s}}{1+\frac{2}{s}}+\frac{V-(-\frac{1}{2})}{\frac{s}{2}}+\frac{V}{1}=0$$

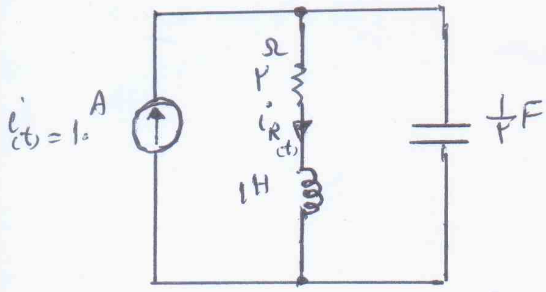
$$\frac{\frac{sV-1}{\cancel{s}}}{\frac{s+2}{\cancel{s}}}+\frac{\frac{2V+1}{\cancel{2}}}{\frac{s}{\cancel{2}}}+V=0 \Rightarrow \frac{sV-1}{s+2}+\frac{2V+1}{s}+V=0$$

$$\frac{s(sV-1)+(s+2)(2V+1)+Vs(s+2)}{s(s+2)}=0$$

$$s(sV-1)+(s+2)(2V+1)+Vs(s+2)=0 \Rightarrow V(2s^2+4s+4)=-2$$

$$V=\frac{-1}{s^2+2s+2}=\frac{-1}{(s+1)^2+1}\longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\longrightarrow \boxed{v(t)=-e^{-t}.\sin t}$$

مثال: در مدار شکل زیر $v_C(0)=3^V$ و $i_L(0)=1^A$ می باشد معادله $I_{R(s)}$ را بدست آورید.

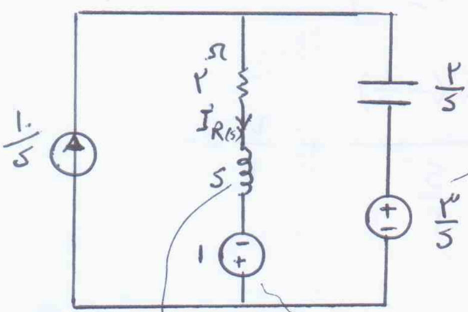


حل: ابتدا مدار شکل روبرو را به حوزه لاپلاس می بریم

پس خواهیم داشت:

$\Downarrow\ v_C(0)=3^V,\ i_L(0)=1^A$

حوزه لاپلاس



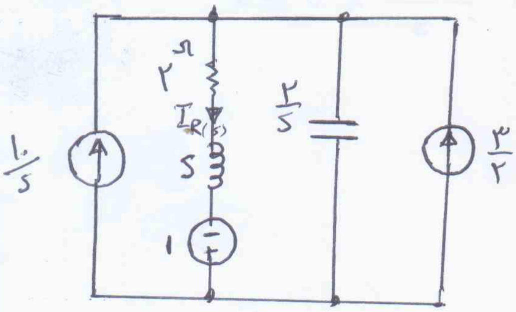
$\frac{1}{Cs}=\frac{1}{\frac{1}{2}s}=\frac{2}{s}$

$\frac{v_{C(0)}}{s}=\frac{3}{s}^V$

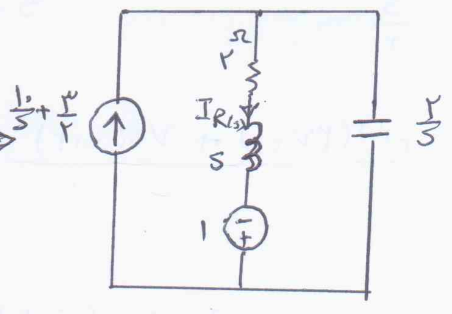
$Li_{L(0)}=1\times 1=1^V$

$Ls=1\times s=s$

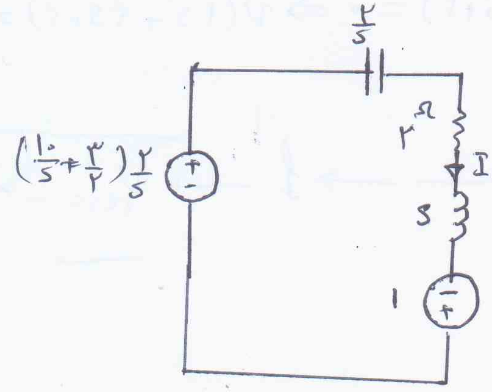
حالا معادل نورتن خازن سری با منبع ولتاژ را می نویسیم:



$\Rightarrow$



تبدیل منبع جریان و امپدانس خازن موازی به منبع ولتاژ و امپدانس خازن سری



$$I_{R(s)}=\frac{(\frac{10}{s}+\frac{3}{2})\frac{2}{s}+1}{\frac{2}{s}+2+s}$$

$$\Rightarrow I_{R(s)}=\frac{\frac{20}{s^2}+\frac{3}{s}+1}{\frac{2}{s}+2+s}=\frac{\frac{20+3s+s^2}{s^2}}{\frac{2+2s+s^2}{s}}=\boxed{\frac{s^2+3s+20}{s(s^2+2s+2)}}$$

جدول ۱۹-۱ زوجهای تبدیل لاپلاس.

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t),\ n = 1,2,\ldots$	$\frac{1}{s^n}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$te^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t),\ n = 1,2,\ldots$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$
$\frac{1}{(\beta-\alpha)}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})\,u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
$\sin \omega t\, u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t\, u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\theta)\,u(t)$	$\frac{s\sin\theta + \omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\theta)\,u(t)$	$\frac{s\cos\theta - \omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\sin \omega t\, u(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos \omega t\, u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

جدول ۱۹-۲ خواص تبدیل لاپلاس.

عمل	$f(t)$	$F(s)$
جمع	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F(s)$
ضرب اسکالر	$kf(t)$	$kF(s)$
مشتقگیری در حوزه زمان	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
	$\frac{d^3f}{dt^3}$	$s^3F(s) - s^2f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
انتگرال زمانی	$\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
	$\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt$	$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\,dt$
کانولوشن	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
جابجایی زمانی	$f(t-a)u(t-a)$, $a \geq 0$	$e^{-as}F(s)$
جابجایی فرکانسی	$f(t)e^{-at}$	$F(s+a)$
مشتقگیری در حوزه فرکانس	$-tf(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$
انتگرال در حوزه فرکانس	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty} F(s)\,ds$
تغییر مقیاس	$f(at)$, $a \geq 0$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
مقدار اولیه	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
مقدار نهایی	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$, تمام قطبهای $sF(s)$ در LHP
تناوب زمانی	$f(t) = f(t+nT)$,	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}F_1(s)$,

پاسخ کامل شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان، با استفاده از معادلات حالت

درصورتی‌که شبکه با یک ورودی و یک خروجی مورد نظر باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس پاسخ کامل برابر خواهد بود با:

$$Y(s) = \underbrace{[c^T(sI - A)^{-1}b + d]\omega(s)}_{1} + \underbrace{c^T(sI - A)^{-1}x(0^-)}_{2} \qquad (۳۷)$$

در معادله (۳۷):

اگر $x(0^-) = 0$ باشد، پاسخ حالت صفر بدست می‌آید یعنی،

$$Y(s) = \underbrace{[c^T(sI - A)^{-1}b + d]}_{H(s)}\omega(s)$$

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\omega(\tau)d\tau \qquad (۳۸)$$

اگر $\omega(s) = 0$ باشد، پاسخ ورودی صفر بدست می‌آید یعنی.

$$Y(s) = c^T(sI - A)^{-1}x(0^-)$$

$$y(t) = c^T e^{At}x(0^-) \qquad (۳۹)$$

ماتریس انتقال حالت $\Phi(t)$

در صورتی‌که شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، با معادلات حالت بفرم زیر توصیف شوند:

$$x' = Ax + bw$$
$$y = c^T x + dw$$

آنگاه ماتریس انتقال حالت بفرم زیر تعریف می‌گردد:

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right] = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots \qquad (۳۳)$$

درصورتی‌که بردار حالت $x(t)$ بعنوان پاسخ کامل درنظر گرفته شود، داریم:

$$x(t) = \Phi(t) * [bw(t)] + \Phi(t)\,x(0)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}bw(\tau)d\tau}_{1} + \underbrace{e^{At}x(0)}_{2} \qquad t \geq 0 \qquad (۳۴)$$

در معادله (۳۴)، جمله ۱ پاسخ به ورودی $W(t)$ (علامت * نشانه کانولوشن ورودی با $\Phi(t)$ می‌باشد) و جمله ۲ پاسخ به شرایط اولیه $x(0)$ است.

خواص ماتریس انتقال حالت

$$\begin{cases} \Phi(0) = I & (۳۵) \\ \dfrac{d\Phi(0)}{dt} = A & (۳۶) \end{cases}$$

جدول ۲-۱۹ خواص تبدیل لاپلاس.

عمل	$f(t)$	$F(s)$
جمع	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F(s)$
ضرب اسکالر	$kf(t)$	$kF(s)$
مشتقگیری در حوزه زمان	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
	$\frac{d^3f}{dt^3}$	$s^3F(s) - s^2f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
انتگرال زمانی	$\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
	$\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt$	$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\,dt$
کانولوشن	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
جابجایی زمانی	$f(t-a)u(t-a)$, $a \geq 0$	$e^{-as}F(s)$
جابجایی فرکانسی	$f(t)e^{-at}$	$F(s+a)$
مشتقگیری در حوزه فرکانسی	$-tf(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$
انتگرال در حوزه فرکانسی	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty} F(s)\,ds$
تغییر مقیاس	$f(at)$, $a \geq 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
مقدار اولیه	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
مقدار نهایی	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$ ، تمام قطبهای $sF(s)$ در LHP
تناوب زمانی	$f(t) = f(t + nT)$,	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}}F_1(s)$,
	$n = 1, 2, \ldots$	که در آن $F_1(s) = \int_{0^-}^{T} f(t)\,e^{-st}\,dt$