سر فصلها:

۱. سازه ها و انواع آن و تحلیل مقدماتی سازه ها

۲. تعیین نیروهای داخلی سازه ها (تیر، قاب و خرپاها)

۳. تعیین تغییر مکانها و تغییر شکل های سازه های خمشی: ۱-روش قضیه های لنگر سطح۲- روش تیر مزدوج

فصل اول: سازه و انواع آن

سازه: مجموعه ای از عضو ها می باشد که بتوانند برای انجام یک خدمت، تمام بارها و اثرهای وارد به خود را تحمل نموده و با حفظ ویژگیهای هندسی و مکانیکی نخستین خود ، این بارها و اثر ها را به محیط پیرامونی منتقل نماید.

انواع سازه ها: ۱) رشته ای ۲) نا رشته ای یا پیوسته

۱– سازه های رشته ای: در سازه های رشته ای ، سطح مقطع عضو ها در برابر طول آنها کوچک می باشد، مانند تیر، ستون، قاب، خرپا و ...

۲– نا رشته ای : صفحه ها و پوسته ها (مانند گنبد مساجد و دال ها)

انواع سازه های رشته ای: تقسیم بندی این سازه ها با توجه به نوع نیروی تحمل شده توسط آنها انجام می پذیرد:

۱- ریسمان ← کششی
۲- قوس ← فشاری
۳- خرپا ← فشار و کشش
٤- تیر ← لنگر خمشی
٥- قاب ← برش و محوری و خمشی
٦- شبکه ← لنگر پیچشی

تحلیل سازه ها:

به مجموعه عملیاتی گفته می شود که بتوان با آن مجهول های یک سازه شامل نیروهای داخلی و تغییر مکان های خارجی را محاسبه نمود، تحلیل سازه گویند.

انواع روش های تحلیل سازه:

۱- روش نرمی

۲- روش سختی

۱- روش نرمی: در روش های نرمی نیروهای داخلی سازه به عنوان مجهول اصلی می باشند.

مانند روش مقطع و مفصل در خرپا ها

۲- روش سختی: در روش های سختی، تغییر مکان های سازه به عنوان مجهول اصلی تحلیل می باشد و از فرآیند های تحلیل حساب می شوند.

نیروهای داخلی و تغییر مکانهای گرهی را می توان به سادگی به یکدیگر تبدیل نمود.

بنیادهای تحلیل سازه با روش نرمی: تحلیل سازه ها با روش نرمی بر سه پایه استوار است:

۱- تعادل

۲- تغییر شکل رابطه های نیرو

۳- رابطه های سازگاری تغییر شکل ها

۱- تعادل (رابطه های تعادل):

رابطه های مستقلی می باشند که میان نیروها و واکنش های یک سازه نوشته می شوند.

تعداد رابطه های تعادل به بعد سازه وابسته است. برای تعیین این رابطه ها کافی است تغییر مکانهای مستقل هر سازه مشخص شوند و به تعداد این تغییر مکانها می توان رابطه ی تعادل نوشت.

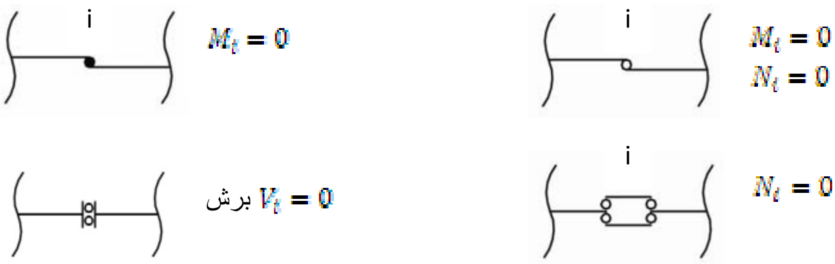
دو بعدی ← ۳ تغییر مکان مستقل ← 3رابطه تعادل

سه بعدی ← ٦ تغییر مکان مستقل ← ٦ رابطه تعادل

واکنش های تکیه گاهی: دو روش موجود است:

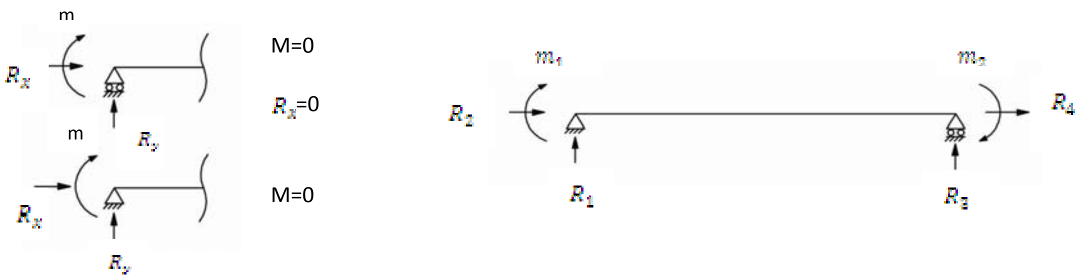
۱- برای تعیین واکنش های تکیه گاهی می توان در راستاهایی که گره تکیه گاه فاقد حرکت باشد، واکنش تکیه گاهی متناظر در آن جهت قرار داد.

رابطه های شرط نیرویی: این معادله ها افزون بر رابطه های تعادل می باشند و دلیل پیدایش آنها، ناپیوستگی ها یا شرط های اضافی در حرکت قسمت های مختلف سازه می باشد.

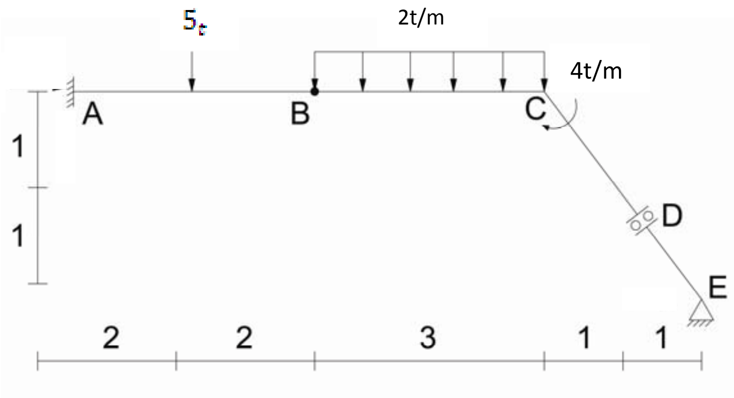


*نوشتن رابطه های شرط نیرویی، متفاوت از رابطه های تعادل می باشد.رابطه های تعادل در کل سازه نوشته می شوند، حال آنکه برای نوشتن شرط های نیرویی لازم است سازه از نقطه ای که دارای شرط نیرویی است جدا شود و در محل جدا شدگی ، نیرو های مناسب، قرار داده شوند. سپس در یکی از قسمتهای جدا شده از یک رابطه تعادل مناسب برای تعیین و محاسبه ی مجهولها استفاده گردد.

۲- باید دانست می توان واکنش های تکیه گاهی را با استفاده از شرط های نیرویی، مدل نمود. برای انجام این کار، در آغاز برای هر گره تکیه گاه سه واکنش تکیه گاهی پنداشته می شود، سپس به تعداد شرط های نیرویی اضافه گره تکیه گاه به معادله های تعادل افزوده می شود.



مثال: واکنش های شکل زیر را حساب کنید.



پایداری و نا پایداری سازه ها:

سازه ی پایدار: الف) پایداری خارجی ب) پایداری داخلی

الف) پایداری خارجی : در این قسمت، سازه از نظر تعداد واکنش های تکیه گاهی و نحوه ی قرار گیری آنها بر روی سازه بررسی می شوند.حداقل تعداد واکنش های تکیه گاهی به گونه ای تعیین می شود که این واکنش های تکیه گاهی بتوانند از تمام حرکت های ممکن سازه، جلوگیری کنند.

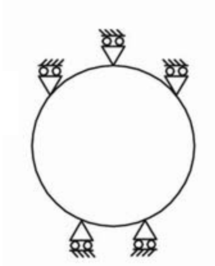
بنابراین حداقل تعداد واکنش های تکیه گاهی به بعد سازه وابسته است.

حداقل سه واکنش تکیه گاهی ← سه حرکت مستقل ← دوبعدی

حداقل شش واکنش تکیه گاهی ← شش حرکت مستقل ← سه بعدی

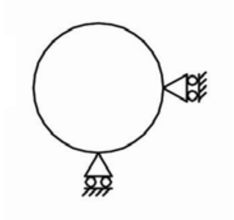
از سوی دیگر، برای پایداری خارجی لازم است تمام واکنش های تکیه گاهی، یکدیگر را در یک نقطه قطع نکنند و نیز تمام واکنش های تکیه گاهی، موازی یکدیگر نباشند.

ناپایدار



با اینکه هم را قطع نمی کنند ولی موازی هستند

ناپایدار



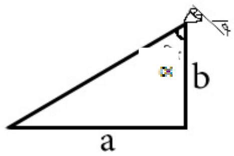
۱.تعداد واکنش ها به حداقل نرسیده

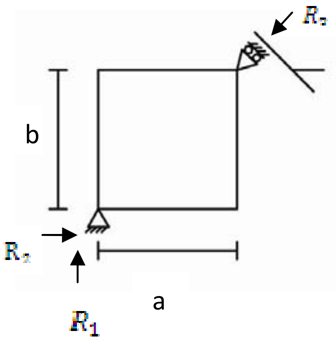
۲.یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند

در پایداری یا ناپایداری سازه های شکل زیر، برحسب مقدارهای مختلف $\propto$ بحث می کنیم

$$\tan\propto = \frac{a}{b}$$

$$\propto = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$





برای $\propto = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ سازه ناپایدار است

برای $\propto + \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ سازه پایدار است

پایداری داخلی: در پایداری داخلی، قابلیت سازه برای تحمل بارها و اثرهای وارد به آن بررسی می شود. در این حالت، رفتار سازه و پاسخ آن به بارهای وارد و نیز نحوه ی قرارگیری اعضا، مهمترین نقش را در پایداری یا ناپایداری آن ایفا می کنند.

در این حالت، شرط پایداری سازه این است که به دلیل محدود و مشخص بودن بارها و اثرهای خارجی وارد به سازه لازم است پاسخ های شامل نیرو یا تغییر مکان نیز مقدارهای محدود و مشخصی داشته باشند.پاسخ های سازه در حل یک دستگاه معادله بدست می آیند.

نخستین شرط برای وجود پاسخ های محدود و مشخص این است که دترمینان ماتریس ضریب های مجهول ها در این دستگاه معادله، مخالف صفر باشد. زیرا با صفر شدن دترمینان ماتریس ضریب ها، دستگاه(سازه) بی شمارپاسخ خواهد داشت.بنابر این ناپایدار است.

در نتیجه شرط لازم و کافی برای پایداری یک سازه، مخالف صفر شدن دترمینان ماتریس ضریب های آن می باشد. باید دانست در تحلیل های عددی، دترمینان ماتریس ضریب ها به صورت عددی حساب می شوند. در این حالت هرچه این مقدار عددی به سمت صفر نزدیک شود احتمال ناپایداری سازه بیشتر می شود. در مقابل، با بزرگ شدن دترمینان ماتریس ضریب ها، سازه پایدارتر می شود.

روش های تعیین پایداری قاب ها:

۱– روش تعداد معادله ها و تعداد مجهول ها : این روش شرط لازم برای پایداری قاب را ارائه می دهد. ولی کافی نیست به عبارتی دیگر، شرط لازم برای پایداری قاب، این است که تعداد معادله ها، همواره کوچکتر یا مساوی تعداد مجهول ها باشد.

j: تعداد گره ها

B:تعداد عضوها

R: تعداد واکنش های تکیه گاهی

C: تعداد شروط نیروی اضافی

تعداد مجهول ها ≥ تعداد مجهول ها

معادله $3j + c$

مجهول $3B + R$

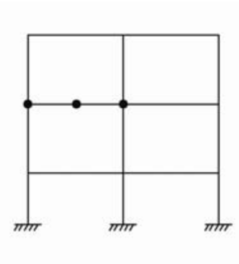
شرط کافی برای پایداری را باید با روشهای دیگر بررسی نمود.

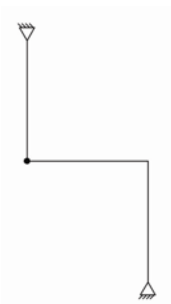
۲– روش وارسی تغییر مکان ها و نیروهای سازه :

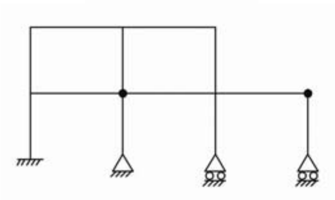
با وجود محدود بودن بارها، سازه ای پایدار است که پاسخ های آن نیز محدود و مشخص می باشند.

به عبارت دیگر، اگر در یک سازه تغییر مکان ها و تغییر شکل های یک یا چند قسمت از آن نامحدود یا بزرگ باشند سازه ناپایدار است. از سوی دیگر ، چنانچه رابطه های تعادل در یک یا چند قسمت از سازه، نقض شوند، سازه ناپایدار خواهد بود.

مثال:







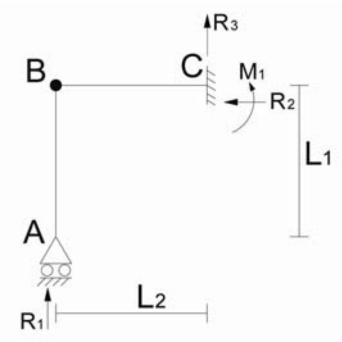
۳– روش دترمینان ماتریس ضریب ها:

در این روش نخست مجهول های سازه مشخص می شوند. حداقل تعداد مجهول های قاب برابر با تعداد واکنش های تکیه گاهی است. با وجود این، می توان شمار بیشتری از نیرو های داخلی قاب را به عنوان مجهول در نظر گرفت ، سپس با نوشتن معادله های تعادل و شرط های نیرویی، دستگاه معادله های حاکم بر رفتار قاب ، برپا می شود.

اکنون ماتریس ضریب های مجهول ها استخراج شده، دترمینان این ماتریس حساب می شوند.

مخالف صفر شدن دترمینان ماتریس ضریب های مجهول ها، نشانگر پایداری قاب خواهند بود.

در این روش از اثر بارهای خارجی صرف نظر می شود و همان ابتدا، بارهای خارجی از قاب حذف می شوند.



۱– $\varepsilon f_x = 0 \Rightarrow R_2 = 0$

۲– $\varepsilon f_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_3 = 0$

۳– $\varepsilon m_c = 0 \Rightarrow R_1 \times l_2 - m_1 = 0$

٤– $\Rightarrow \varepsilon m_B = 0 \Rightarrow R_1 \times 0 = 0$

ناپایدار

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ L_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ M_1 \end{bmatrix} = 0$$

زیرا یک سطر یا ستون صفر وجود دارد پس سازه ناپایدار است.

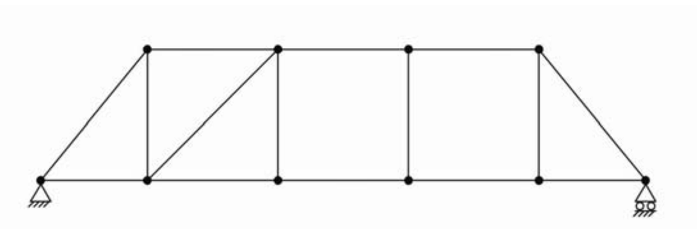
روشهای تعیین پایداری خرپا

۱–روش تعداد معادله ها و مجهولها :

این روش، شرط لازم برای پایداری خرپا ها را ارائه می دهد، ولی کافی نیست. شرط لازم پایداری خرپاها به صورت زیر می باشد:

$$\begin{array}{l} 2J \ \text{معادله} \\ B+R \ \text{مجهول} \end{array} \Rightarrow B+R \geq 2J$$

۲–روش وارسی : سه عضو خرپایی، تشکیل یک مثلث صلب را می دهند. چنانچه سازه خرپایی از گسترش قسمتهای صلب مثلثی تشکیل شده باشد، آن خرپا از نظر داخلی پایدار است. چنانچه در خرپا یک قسمت غیر مثلثی (ناصلب) وجود داشته باشد، آنگاه باید آن خرپا از نظر تغییر مکانهای ایجاد شده در آن ، کنترل شود. در صورت وجود قید های اضافی که از حرکت خرپا جلوگیری می کنند، خرپا پایدار خواهد بود. با گذاشتن تکیه گاه قرمز، از تغییر شکل های سبز رنگ جلوگیری می شود.



۳–روش آزمون بار صفر: از این روش می توان برای مشخص کردن ناپایداری خرپاها استفاده کرد. این روش بر این پایه استوار است که نیروهای داخلی یک سازه بدون بار گذاری خارجی، صفر می باشند. بنا براین اگر روی یک سازه ی فاقد بارگذاری خارجی ، یک دسته نیروی داخلی مخالف صفر بدست آید، آن سازه نا پایدار است.

در خرپاها از این روش برای مشخص کردن ناپایداری استفاده می شود. برای انجام این کار، نیروی داخلی یکی از عضوهای خرپا، مقدار *S* فرض می گردد. باید دانست، عضو انتخابی نباید از اعضاء صفر نیرویی باشد.

سپس خرپا تحت اثر نیروی عضو *S* فرض شده، تحلیل می شود و نیروهای دیگر عضوهای آن از معادله های تعادل حساب می شوند. چنانچه در پایان ، تمام نیروهای عضوها، تابعی از *S* بدست آید، خرپای مورد نظر دارای بیشمار نیروی داخلی خواهد بود. زیرا می توان هر مقدار عددی را برای *S* در نظر گرفت در نتیجه خرپا ناپایدار است.

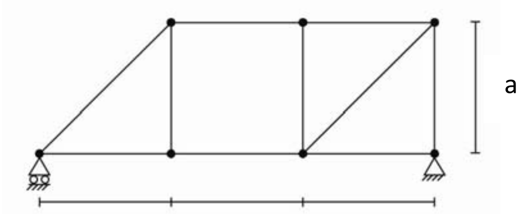
چنانچه در هنگام تحلیل ، از یکی از را بطه های تعادل ، $S=0$ شد، آنگاه نمی توان از این روش در تعیین پایداری یا ناپایداری خرپا اظهار نظر کرد و باید از روش های دیگر استفاده نمود.

۴–روش دترمینان ماتریس ضرایب :

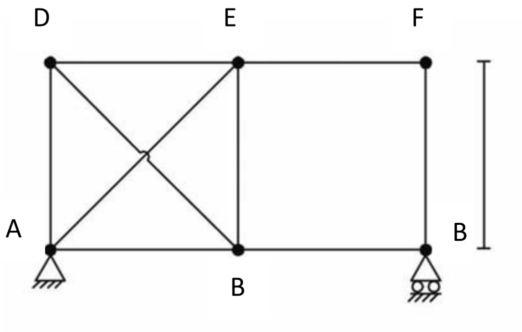
در این شیوه، نخست معادله های حاکم بر رفتار خرپا از رابطه های تعادل گرهی بدست می آیند. سپس ماتریس ضریب ها تشکیل می شود. اگر دترمینال ماتریس ضریب ها صفر گردد، خرپا ناپایدار است.

مخالف صفر شدن دترمینال ماتریس ضریبها، نشانگر پایداری خرپا است.

مثال: در پایداری یا ناپایداری خرپاهای شکل زیر، با روش های مختلف، اظهار نظر کنید.

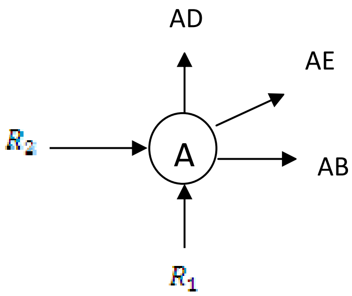


a a a

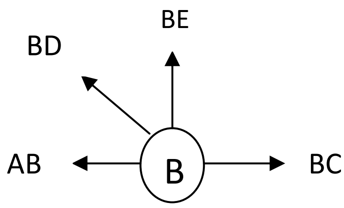


برای راحتی کار، حل شکل بالا به روش دترمینان ماتریس ضرایب در صفحه بعد نوشته شده است.

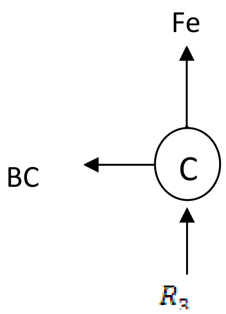
حل شکل صفحه قبل به روش دترمینان ضرایب :



$$\begin{array}{l} x: \\ y: \end{array}\begin{cases} R_2 + AB + AE\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 & 1 \\ R_1 + AD + AE\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 & 2 \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} x: \\ y: \end{array}\begin{cases} BC - AB - BD\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ BE + BD\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} x: \\ y: \end{array}\begin{cases} Bc = 0 \\ Fe + R_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 & ۱ & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & ۲ & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ AB \\ Bc \\ AD \\ AE \\ BD \\ BE \\ Fc \\ DE \\ EF \end{bmatrix} = 0$$

این ماتریس مساوی صفر خواهد شد.

*درجه ی نامعینی :

چنانچه در یک سازه، تعداد مجهول ها بیشتر از معادله های تعادل و شرط های نیرویی باشد، آن سازه نامعین نامیده می شود و نمی توان نیرو های سازه را تنها با استفاده از معادله های تعادل و شرط های نیرویی حساب کرد.

برای تحلیل این سازه ها ، نخستین گام، تعیین درجه نا معینی است. درجه نامعینی به صورت زیر تعریف می شود.

تعداد معادله ها – تعداد مجهول ها = درجه نامعینی(N)

درجه نامعینی را می توان از روش های زیر حساب کرد:

۱–روش تعداد معادله ها و مجهول ها :

در خرپای دو بعدی $N=B+R-2J$

قاب دو بعدی $N=3(B-J)+(R-C)$

۲–روش حلقه : هر حلقه بسته ، سه درجه نامعین است. بنابر این چنانچه یک سازه دارای L حلقه ی بسته باشد، آنگاه درجه نامعینی آن از رابطه زیر حساب می شود:

$$N=3L-C-C_R$$

C: شرط های نیروی اضافی C_R: شرط های نیرویی تکیه گاه ها

در این شیوه، اثر واکنش های تکیه گاهی توسط شرط های نیرویی آنها (C_R) در نظر گرفته می شوند.

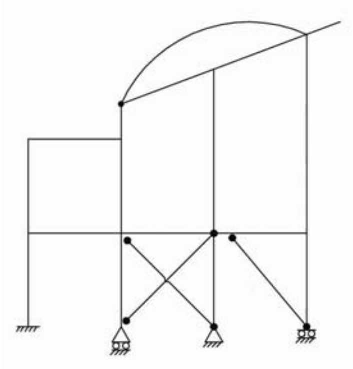
۳–روش مقطع : چنانچه در یک سازه، تعداد Lحلقه بسته وجود داشته باشد آنگاه می توان با S مقطع، تمام خرپا را باز نمود. در اینصورت درجه نامعینی این سازه از رابطه زیر محاسبه می شود:

$S=L$ $N=3S-C-C_R$

۴–روش درخت : در این شیوه، سازه نا معین تبدیل می شود. برای انجام این کار نخست سازه از محل های تکیه گاه ها و نیز نقاطی که دارای شرط های نیرویی می باشند (مانند مفصل) آزاد می گردد. همچنین به تعداد کافی مقطع و برش برروی سازه در نظر گرفته می شود به گونه ای که هیچ حلقه بسته ای برروی سازه باقی نماند. در هر یک از محله های جداشدگی و برش تعداد نیروهای مجهول پدید آمده قرار داده می شود. اگر F تعداد کل این نیرو ها باشد و به تعداد T زیر سازه معین (درخت) در اثر جداشدگی ها در سازه پدید آمده باشد آنگاه درجه نامعینی از رابطه زیر حساب میشود.

$$N=F-3T$$

مثال: درجه نامعینی سازه شکل زیر را با روش های مختلف تعیین کنید.



فصل دوم

محاسبه نیروهای داخلی سازه ها :

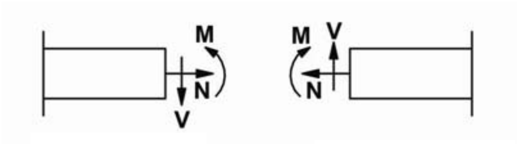
نخست لازم است نیرو های داخلی سازه ها دسته بندی شوند. این دسته بندی با توجه به اثر تغییر شکلی آنها انجام می پذیرد. بر این اساس نیروهای داخلی در یکی از دسته های زیر قرار می گیرند.

۱– نیروهای محوری : این نیرو در راستای محور عضو اثر می کند و باعث کوتاه یا بلند شدن طول عضو می شود. محور عضو خطی است که گره ابتدا را به انتهای عضو وصل می کند.

۲– نیروی برشی : این نیروی عمود بر محور عضو، اثر می کند و باعث جابجایی عمومی صفحات مقطع نسبت به یکدیگر می شود.

۳– لنگر خمشی : بردار این نیرو در صفحه ی عمود بر عضو قرار دارد باعث دوران مقاطع عضو می شود.

4– لنگر پیچشی :بردار لنگر پیچشی در امتداد و محور عضو است و باعث می شود. صفحه های مقطع گرد محور عضو دوران کنند. جهت های قرار دادی محاسبه ی نیرو های داخلی به صورت زیر می باشند.



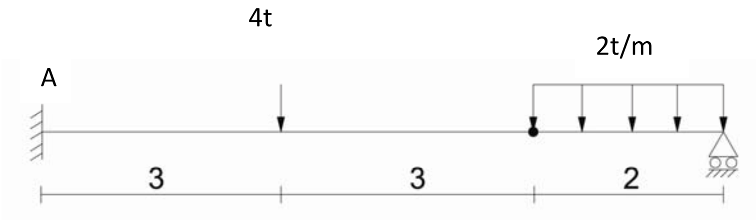
چپ به راست   راست به چپ

روش جزء به جزء یا روش روی هم گذاری :

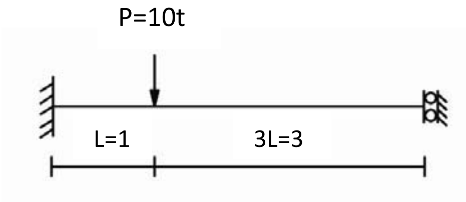
از این روش می توان برای رسم نمودارهای لنگر و برش تیرهای سرتاسری معین و نامعین استفاده کرد . کلیات روش در تیرهای معین و نا معین یکسان است. در تیرهای معین نخست واکنش ها از رابطه های تعادل حساب می شوند. سپس نمودار نیروی داخلی مربوط به هریک از واکنش ها و بارهای خارجی به صورت جداگانه رسم می گردد.

با روی هم گذاری این نمودارها نمودار نیروی داخلی تیر معین بدست می آید.

مثال: نمودار لنگر و برش تیر شکل زیر را رسم کنید.



تمرین: نمودار لنگر تیر نا معین شکل زیر را رسم کنید.



توضیح برای حل تمرین بالا

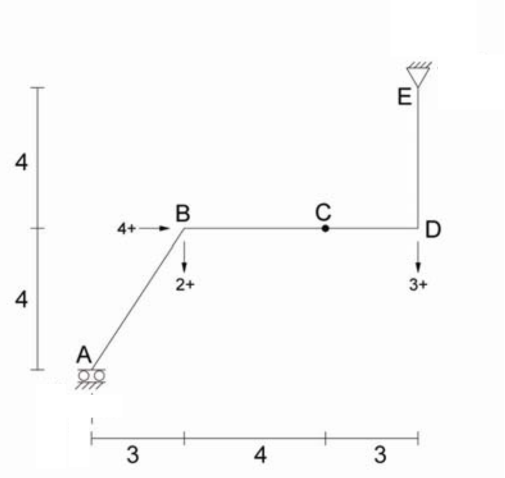
از آنجا که نیروی واکنش R (واکنش افقی تیر) اثری در لنگر ندارد. بنابراین می توان این واکنش را در تیرهای سر تا سری همواره معلوم پنداشت. در این سازه لنگر M که واکنش تکیه گاه می باشد معلوم فرض می شود و نمودار لنگر بر حسب این واکنش تکیه گاهی معلوم فرض شده بدست می آید. نخست از رابطه های تعادل، دیگر واکنش های تکیه گاهی به صورت تابعی از واکنش معلوم فرض شده بدست می آیند.

رسم نمودار های نیروهای داخلی قابها :

برای رسم نمودارهای نیروهای داخلی قابها از روش تحلیلی استفاده می شود. برای انجام این کار نخست واکنش های تکیه گاهی قاب از معادله های تعادل و شرط های نیرویی آن حساب می شود. سپس با توجه به شرایط هندسی ، بارگذاری و نیرویی قاب مقطع هایی برای محاسبه ی نیروهای داخلی قاب، شامل نیروی محوری برش و لنگر خمشی در نظر گرفته می شوند. در هریک از این مقاطع، تابع های نیروهای داخلی از رابطه های تعادل مناسب، حساب می شوند.

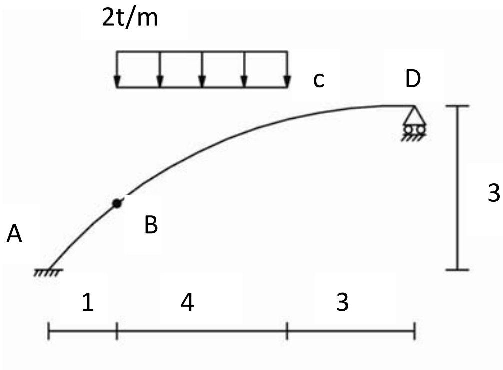
با رسم کردن این تابع ها برروی قاب نمودارهای نیروهای داخلی قاب بدست می آیند.

مثال: نمودار لنگر برش و محوری قاب شکل زیر را رسم کنید.



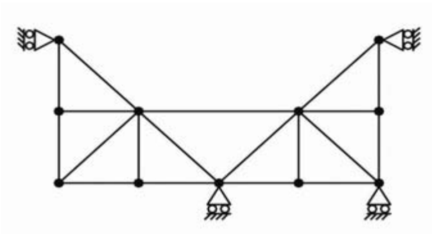
نیرو های داخلی قوسها : برای تعیین تابع های نیروهای داخلی قوس ها، نخست شکل هندسی قوس و تابع آن مشخص می گردد. سپس واکنش های تکیه گاهی از معادله های تعادل حساب می شود. اکنون با توجه به تغییر هندسه و بار گذاری قوس، قوس به تعدادی قسمت کوچکتر تقسیم می شودو در هر قسمت، تابع های نیروهای داخلی از معادله های تعادل حساب می شوند. با درج مقدارهای عددی این تابع ها در جدول، تغییرات نیروهای داخلی قوس بدست می آید.

مثال: تابع های نیرو های داخلی قوس شکل زیر را پیدا کنید؟ (قوس درجه ۲)

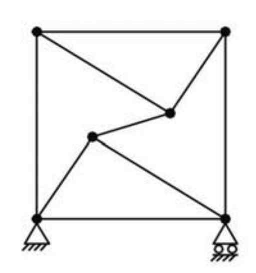


انواع خرپاها :

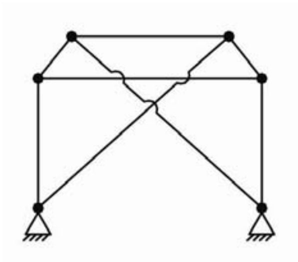
۱- **خرپای ساده :** این خرپا از کنار هم قرار گرفتن قسمت های صلب مثلثی تشکیل می شوند.



۲- **خرپای مرکب :** از اتصال دو یا چند خرپای ساده یک خرپای مرکب بدست می آید.



۳- **خرپای مختلط :** خرپایی که نتوان آن را در یکی از دسته های ساده یا مرکب جای داده مختلط است.

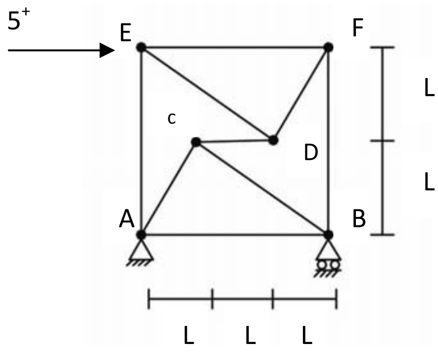


روشهای تعیین نیروهای داخلی خرپاها

۱- **روش مفصل دستی :** این روش، تنها برای خرپاهای ساده که بتوان در حداقل یکی از گره های آنها، دو مجهول وجود داشته باشد، به کار می رود. رابطه های تعادل در این گره که دارای دو نیروی مجهول است، نوشته می شود و با حل این رابطه ها، دو مجهول گره حساب می شود. این فرایند برای دیگر گره های خرپا تکرار می شود و تمام نیروهای داخلی عضوهای آن حساب می شوند.

۲- **روش نیروهای مجهول :** این روش برای تعیین نیروهای داخلی خرپاهای معین، مرکب یا مختلط به کار می رود. محاسبات این روش از یک گره خرپا که دارای سه مجهول است، آغاز می شود. یکی از مجهول ها در آن گره، مقدار معلوم X فرض می گردد و دو مجهول دیگر از رابطه های تعادل بر حسب x حساب می شوند. اکنون رابطه های تعادل در دیگر گره های خرپا نوشته می شود و نیروهای عضوهای دیگر خرپا نیز بر حسب X بدست می آیند. از آنجا که خرپای نخستین معین بوده است، مقدار X از یکی از رابطه های تعادل بدست می آید. با داشتن مقدار X، نیروهای دیگر عضوهای خرپا حساب می شود.

مثال: نیروهای داخلی خرپای شکل زیر را حساب کنید.



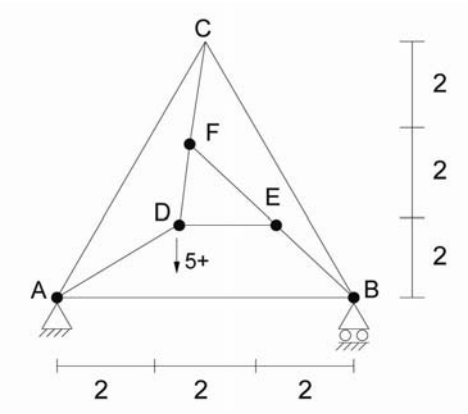
۳-**روش مقطع :** از این روش، هنگامی استفاده می شود که هدف محاسبه ی نیروهای عضوهای خاصی از خرپا می باشد. برای انجام این کار خرپا توسط یک مقطع بریده می شود، به گونه ای که در محل بریدگی بیش از سه مجهول وجود نداشته باشد و مجهول های پدید آمده یکدیگر را در یک نقطه قطع نکنند و نیز این مجهول ها موازی یکدیگر نباشند.

با استفاده از معادله تعادل لنگر، می توان مجهول های موجود در مقطع را حساب کرد.

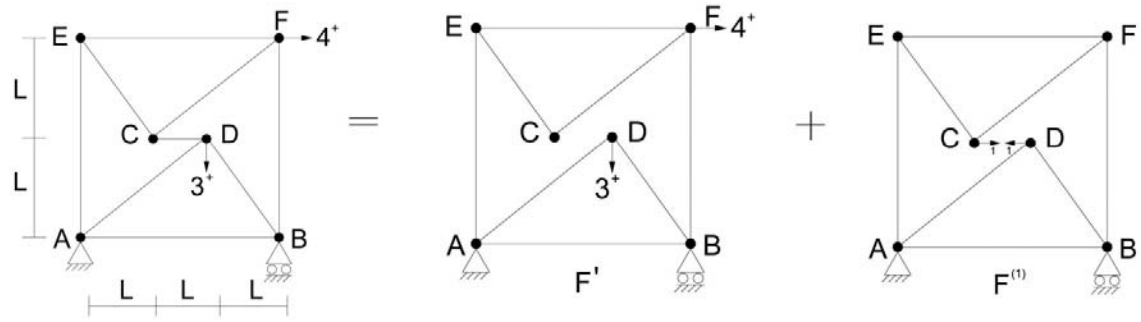
٤-**روش جداسازی :** این روش، همانند روش مقطع می باشد، با این تفاوت که در روش جداسازی، مقطع استفاده شده در خرپا، سبب جدا کردن یک بخش از خرپا می شود. قسمت جدا شده معمولاً در کل خرپا تکرار شده است. به عبارت دیگر در روش جداسازی، قسمت های تکراری توسط یک مقطع بسته از خرپا جدا می گردد.

اکنون با استفاده از رابطه های تعادل در قسمت جدا شده، نیروهای مرز جداشدگی حساب می شوند. با استفاده از این نیروها می توان دیگر نیروهای خرپا را نیز حساب کرد.

مثال: خرپای شکل زیر را با روش جداسازی تحلیل کنید.



۵-**روش هنبرگ :** در روش هنبرگ یا جابه جایی عضوها، از سه اصل تعادل، روی هم گذاری و نیز سازگاری نیروها استفاده می شود. برای انجام این کار، یک خرپای مرکب یا مختلط را در نظر بگیرید.



خرپای نخستین خرپای پایه خرپای پایه

این خرپا را نمی توان با روش مجهول معمولی تحلیل نمود. برای استفاده از روش هنبرگ یک یا چند عضو خرپا از محل های نخستین آنها جا به جا می شوند. این جا به جایی و تغییر محل عضو ها باید به گونه ای انجام شود که خرپای بدست آمده پس از جابجا کردن عضوها، پایدار باشد. خرپای بدست آمده پس از جا به جا کردن عضو ها را خرپای پایه می نامند.

اکنون با استفاده از رابطه های تعادل، خرپای پایه در اثر بارهای خارجی خرپای نخستین، تحلیل می شود و نیروهای داخلی عضوهای آن($\acute{F}$) حساب می شوند. اکنون لازم است نیروهای عضو های خرپای پایه با نیروهای عضوهای خرپای نخستین سازگار باشند. برای ایجاد این سازگاری نیرویی لازم است، نیروی عضو های اضافه شده به خرپا (عضو ها در محل های جدید) صفر گردند زیرا این عضوها در خرپای نخستین وجود ندارند. برای ایجاد این ساز گاری نیرویی لازم است،نیروی عضوهای اضافه شده به خرپا(عضوها در محل های جدید)، صفر گردند. زیرا این

عضوها در خرپای نخستین وجود ندارند. برای ایجاد این سازگاری نیرویی، یک بارگذاری یکه در محل نخستین عضو جابه جا شده قرار داده می شوند و خرپای پایه در اثر این باریکه به تنهایی تحلیل میشود. در اینصورت بردار نیروهای ($F^{(1)}$) بدست می آید.

برای نوشتن معادله ی سازگاری نیرویی و صفر نمودن نیروی عضو اضافه شده به خرپا (در اینجا عضوFD) از اصل روی هم گذاری نیروها در خرپای پایه استفاده می شود. بدین صورت که مجموع درایه ی نیروی عضو FD در اثر بار گذاری خارجی با X برابر نیروی FD در اثر بارگذاری یکه باید صفر گردد. در اینجا X نیروی عضو CD می باشد.

یعنی می توان نوشت:

$$\acute{F}_{ED} + X\,F^{(1)}_{ED} = 0$$

$X = \frac{-\acute{F}_{ED}}{F^{(1)}_{ED}}$ نیروی عضو ED

از رابطه ی یک نیروی عضو جابه جا شده ی CD حساب می شود. اکنون می توان نیروهای دیگر عضوهای خرپای نخستین را از رابطه ی زیر حساب نمود.

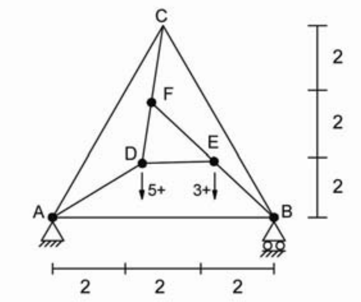
$$F = \acute{F} + x.F^{(1)} \qquad 2$$

تمرین ۱: خرپای مسئله قبل را در هریک از حالت های زیر با روش هنبرگ تحلیل کنید.

۱-جابجا نمودن عضو FC و قرار دادن آن در محل AC

۲-جابجا نمودن عضو BD و قرار دادن آن در محل AC

تمرین۲: خرپای شکل زیر را با روش هنبرگ تحلیل کنید.



فصل سوم

تغییر شکل های خمشی سازه :

تغییر شکل در مقاطع عضوهای سازه پدید می آید و عامل بوجود آورنده و آن ، نیروهای داخلی سازه می باشد.

بنابراین تغییر شکل های هر یک از نیروهای داخلی نیز مستقل از یکدیگر می باشند.

به عبارت دیگر تغییر شکل های محوری ، تغییر شکل برشی و تغییر شکل خمشی و تغییر شکل پیچشی، مستقل از یکدیگر هستند.

تغییر مکان :

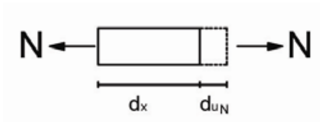
تغییر مکان در گره های سازه پدید می آید و عامل ایجاد کننده ی آن تغییر شکل های عضوهای سازه است.

به عبات دیگر جمع آثار تغییر شکل های عضوها و روی هم گذاری آنها با یکدیگر سبب تغییر مکان گره های سازه می گردد.

در ادامه انوع تغییر شکل های سازه و رابطه هایی برای محاسبه ی آنها ارائه می گردد.

۱) تغییر شکل محوری :

قطعه ای از یک عضو به طول du که تحت اثر نیروی محوری به قرار دارد را در نظر بگیرید. تغییر شکل محوری از رابطه ی زیر محاسبه خواهد شد.



$du_n = \varepsilon_n d_x$

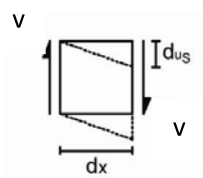
کرنش محوری $\varepsilon_n = \frac{N}{AE}$

$du_n = \frac{N}{AE} d_x$

تغییر شکل محوری عضو $u_n = \int_0^L \frac{N}{AE} d_x$

A: سطح مقطع عضو　　E: ضریب کشسانی　　L: طول عضو

۲)تغییر شکل برشی :



$du_s = \varepsilon_s d_x$

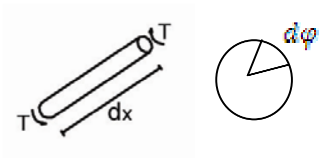
کرنش برشی $\varepsilon_s = \frac{f_s U}{GA} d_x$

f_s: ضریب شکل مقطع　　G: مدول برشی

$du_s = \frac{f_s U}{GA} d_x$

تغییر شکل برشی $U_s = \int_0^L \frac{f_s V}{GA} d_x$

۳)تغییر شکل پیچشی :



$d\varphi = \varepsilon_T \; d_x$

کرنش پیچشی $\varepsilon_T = \frac{T}{Gy}$

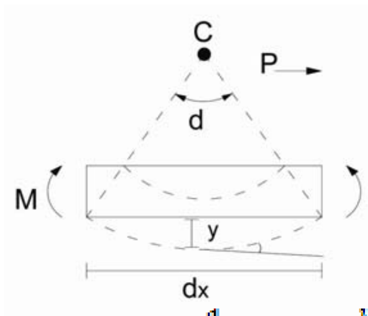
$$d\varphi = \frac{T}{Gy} d_x$$

تغییر شکل پیچشی $\varphi = \int_0^L \frac{T}{Gy} d_x$

۴–تغییر شکل خمشی :

$d_x = \rho . d\theta$

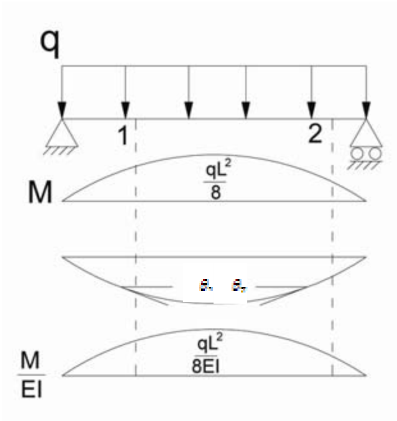
y: تابع تغییر مکان خمشی



$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{1}{\rho} = K = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$



θ شیب خط مماس بر نمودار تغییر شکل خمشی

$$\frac{d}{dx}(\theta) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow \theta = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \Rightarrow d\theta = \frac{M}{EI}dx$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_1^2 \frac{M}{EI}dx \Rightarrow \boxed{\theta_2 - \theta_1 = \int_1^2 \frac{M}{EI}dx} \quad (1)$$

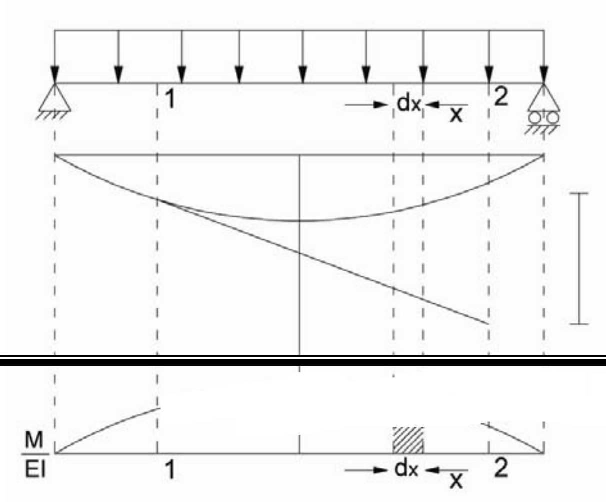
→ رابطه ی ۱) قضیه ی اول لنگر سطح را نشان می دهد. بر این اساس تغییر زاویه ی مماس بر تابع تغییر شکل خمشی سازه بین ۲ نقطه ی ۱ و ۲ برابر است با سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ بین آن دو نقطه (ناحیه هاشور خورده) باید دانست از این قضیه ، تغییر θ تغییر شیب خط مماس (θ) بدست می آید نه خود شیب خط مماس. زاویه ی θ که همان شیب خط مماس است. همواره کوچکترین زاویه ی دوران از امتداد مماس بر تابع تغییر شکل خمشی به سمت محور اولیه ی عضو (خط افق) می باشد.

در این حالت چنانچه دوران ساعتگرد انجام شود، θ مثبت و چنانچه دوران پاد ساعتگرد انجام شود θ منفی است.

قضیه ی دوم لنگر سطح :

$$d\Delta = (x + dx)d\theta = xd\theta + dxd\theta$$

$$d\Delta = xd\theta = x\frac{M}{EI}dx$$



Δz1

$$\int_1^2 d\Delta = \int_1^2 x\frac{M}{EI}dx$$

$$\boxed{\Delta_{21} = \int_1^2 x\frac{M}{EI}dx} \qquad (۲)$$

رابطه ی ۲) قضیه ی دوم لنگر سطح را نشان می دهد. بر این اساس فاصله ی نقطه ی ۲ بر روی نمودار تغییر شکل خمشی تا مماس رسم شده از نقطه ۱ (Δ_{21}) برابر است با گشتاور سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ نسبت به نقطه ۲

* یادآوری : مقدار بدست آمده از قضیه ی دوم (Δ_{21}) به مفهوم تغییر شکل خمشی نیست.

*** ویژگیهای قضایای لنگر سطح :**

۱) قضیه های لنگر سطح در دامنه های پیوسته خمشی (دامنه های بدون مفصل) به کار می روند.

۲) از قضیه های لنگر سطح، مقدارهای نسبی (تغییر شیب مماس یا فاصله ی نقطه ی ۲ تا مماس نقطه ی ۱) بدست می آیند و نمی توان از آنها به صورت مستقیم ، خیز و شیب را صاف نمود.

۳) جهت قرار دادی خیز (y) ، به سمت پائین ، مثبت می باشد و به سمت بالا منفی می باشد.

*** گام های حل مسائل با قضیه های لنگر سطح :**

۱- رسم نمودار لنگر خمشی

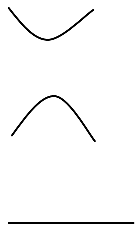
۲- تعیین نمودار $\frac{M}{EI}$

۳- رسم نمودار تغییر شکل تقریبی خمشی از روی نمودار $\frac{M}{EI}$ و با توجه به شرایط تکیه گاهی سازه

$\frac{M}{EI} > 0$

$\frac{M}{EI} < 0$

$\frac{M}{EI} = 0$



٤- نوشتن رابطه های سازگاری میان تغییر شکل های خمشی و کمیت های بدست آمده از قضیه های لنگر سطح این رابطه ها از روی نمودار تغییر شکل تقریبی خمشی بدست می آیند.

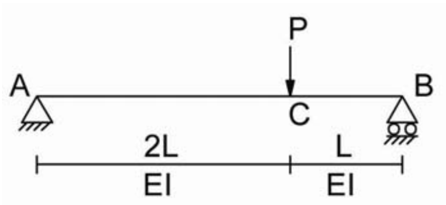
٥- حل معادله های سازگاری و تعیین مجهول ها (خیز و دوران نقاط مختلف)

* در گام چهارم از مراحل بالا رابطه سازگاری تغییر شکل با فرض کوچک بودن تغییر شکلهایسازه نوشته می شود.

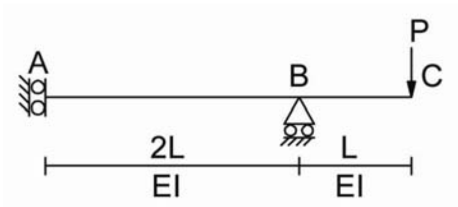
* معادله های سازگاری معمولا با رسم مماس از یک نقطه بر نمودار تغییر شکل تقریبی و استفاده از روابط مثلثاتی با فرض تغییرشکل های کوچک بدست می آید.

مثال: در تیر شکل زیر، دوران گروههای A و B و نیز خیز بیشینه را حساب کنید.

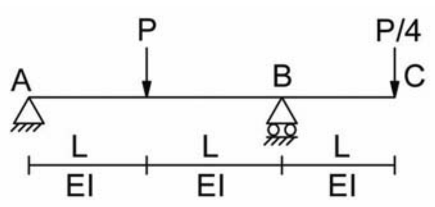
(خیز نقطه اثر بار در نقطه ی C را حساب کنید) $tan\theta \approx sin\theta \approx \theta$



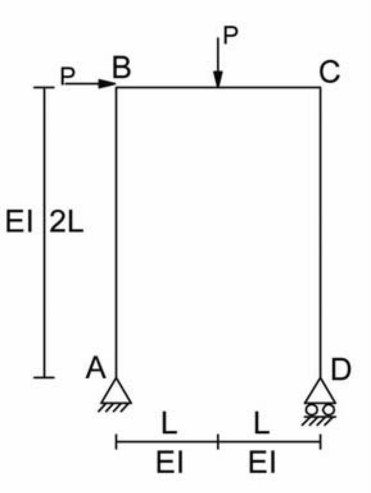
مثال : در تیر شکل زیر، دوران های نقاط B وC و نیز خیز نقطه های A وC را حساب کنید.



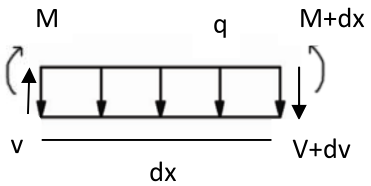
مثال : در تیر شکل زیر، دوران گره B و خیز نقطه ی C را حساب کنید.



مساله از قاب : در شکل زیر با در نظر گرفتن اثر خمشی به تنهایی و استفاده از قضیه های لنگر سطح مطلوبست محاسبه ی دوران گره های A و B و C و D و نیز تغییر مکان افقی گره D.



روش تیر مزدوج :



$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \quad , \quad \theta = \int \frac{M}{EI}dx \qquad (1)$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad , \quad dy = \theta dx$$

$$y = \int \theta dx \qquad y = \iint \frac{M}{EI}dx \qquad (2)$$

$$dv = qdx \qquad v = \int qdx \qquad (3)$$

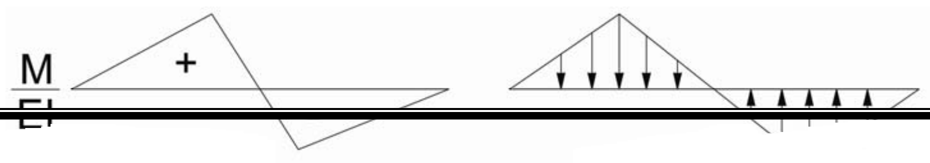
$$v = \frac{dx}{dx} \qquad dx = vdx$$

$$M = \iint qdx \qquad (4)$$

مقایسه ی رابطه های ۱ و ۲ با معادله های ۳ و ٤ به روش تیر مزدوج منجر می گردد. به عبارت دیگر چنانچه بارگذاری یک تیر (q) با $\frac{M}{EI}$ جایگزین شود. آن گاه برش در هر مقطع تیر طبق رابطه ۱ دوران آن مقطع را نشان می دهد. از سوی دیگر دوران حالت لنگر در هر مقطع طبق رابطه ۲ خیز آن نقطه را نشان می دهد.

به تیری که بارگذاری آن توسط $\frac{M}{EI}$ جایگزین شده است، تیر مزدوج تیر اصلی گویند.

نکته: هندسه تیر مزدوج (ابعاد و اندازه های آن) کاملا مشابه و همانند هندسی تیر اصلی است. از سوی دیگر بارگذاری تیر مزدوج توسط نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر اصلی انجام می شود جهت این بارگذاری به صورت زیر تعیین می شود.

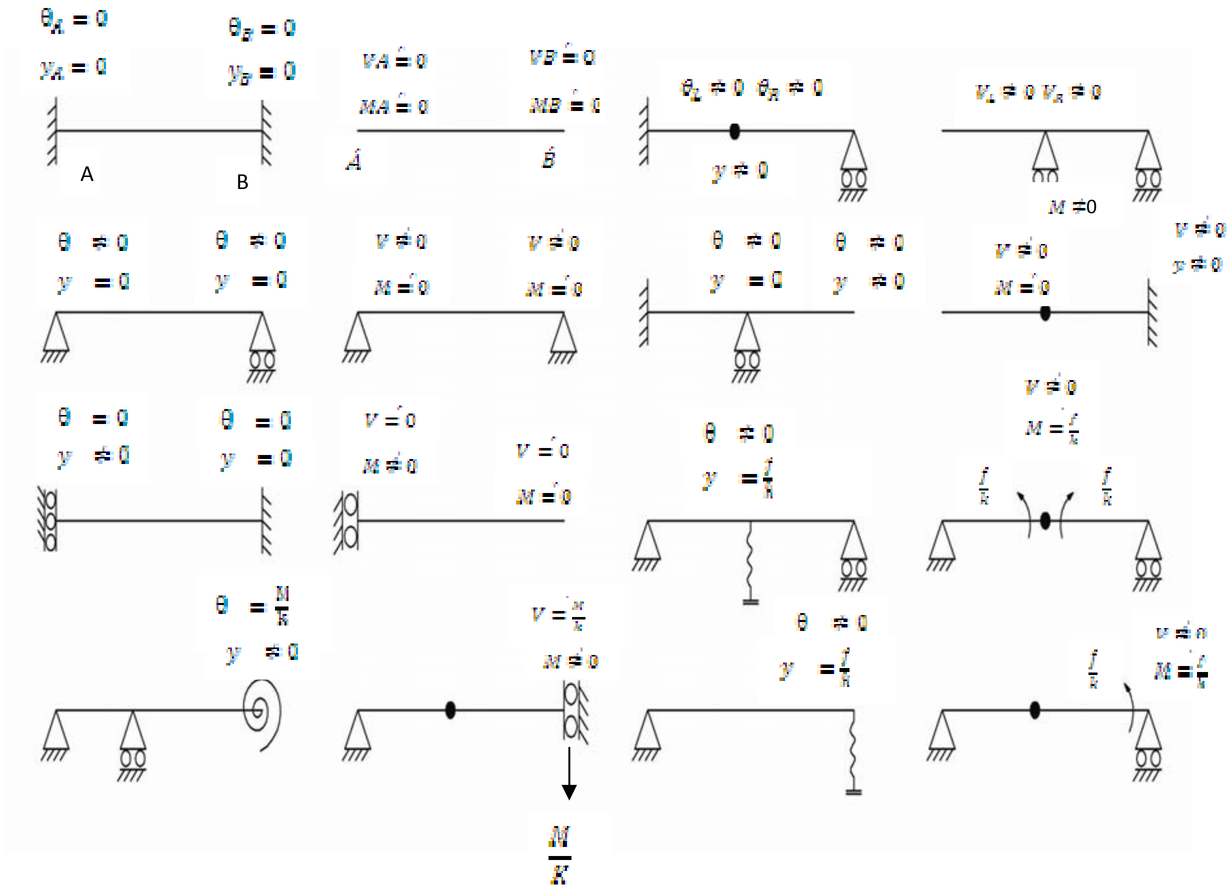


تیر اصلی

تیر مزدوج

شرایط تکیه گاهی تیر مزدوج

شرایط تکیه گاهی تیر مزدوج از روی تغییر مکان ها و دوران های تکیه گاههای تیر اصلی بدست می آیند. به عنوان نمونه فرض گردد یکی از تکیه گاههای تیر اصلی گیر دار است. در این صورت دوران و خیز در محل تکیه گاه در تیر اصلی صفر است.



ویژگیهای روش تیر مزدوج :

۱- در این روش تنها اثر تغییر شکل های خمشی در نظر گرفته می شود.

۲- تیر مزدوج تیر اصلی همواره معین و پایدار است . معین بودن تیر مزدوج سبب می شود بتوان روش تیر مزدوج را برای تحلیل تیرهای نا معین خمشی نیز به کار برد.

به عبارت دیگر اگر تیر اصلی نا معین باشد، تیر مزدوج آن معین است و می توان مجهولها را تنها با رابطه های تعارل حساب کرد.

از سوی دیگر تیر مزدوج همواره پایدار است . چنانچه تیر مزدوج به تعداد کافی واکنش تکیه گاهی برای تأمین پایداری نداشته باشد، آنگاه شرط های پایداری آن توسط بارگذاری اعمال شده به آن (نمودار$\frac{M}{EI}$) تامین می گردد.

۳- در روش تیر مزدوج راستا های مثبت برای محاسبه ی نیروهای داخلی (لنگر و برش هر مقطع) همانند جهت های قراردادی فصل دو است. چنانچه برش در یک مقطع از تیر مزدوج مثبت شود در آن مقطع دوران پادساعتگرد انجام شده است (در تیر اصلی). از سوی دیگر مثبت شدن لنگر در هر مقطع تیر مزدوج نشانگر این است که آن مقطع در تیر اصلی به سمت پائین حرکت جا به جا شده است.

گام های حل مسائل به روش تیر مزدوج

۱- رسم نمودار لنگر تیر اصلی

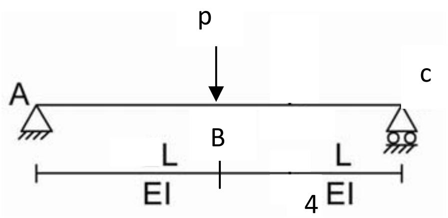
۲- مشخص کردن نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر اصلی

۳- رسم تیر مزدوج و مشخص کردن شرایط تکیه گاهی آن با توجه به دورانها و خیز تکیه گاه های تیر اصلی

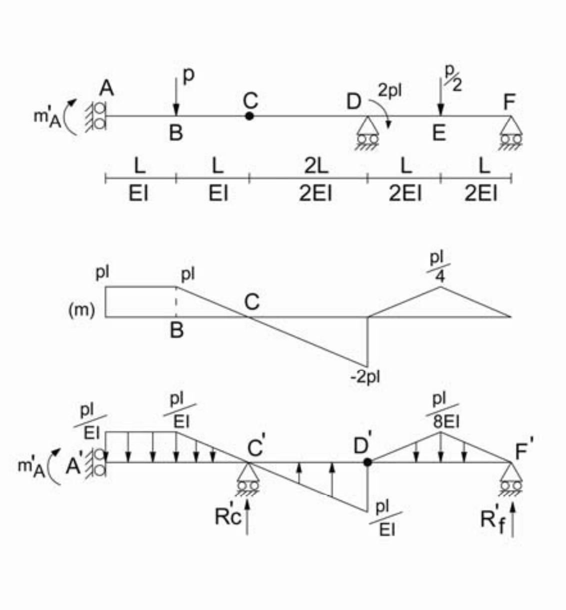
٤- قرار دادن نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر اصلی به عنوان بار بر روی تیر مزدوج

٥- تحلیل تیر مزدوج با رابطه های تعادل و محاسبه ی برش و لنگر در هر مقطع تیر مزدوج و معادل قرار دادن آنها با دوران و خیز آن مقطع در تیر اصلی

مثال: در تیر شکل زیر با روش تیر مزدوج دوران تکیه گاه A وc و خیز گره B را حساب کنید.



به عنوان مثال، در تیر شکل زیر، داریم



$\sum M_C = \circ \Rightarrow MA = PL$

کل سازه $\sum M_D = \circ$

$M_A - P\times 3L + 2PL + \frac{P}{2}\times L - R_F \times 2L = \circ$

$R_F = \frac{p}{4}$

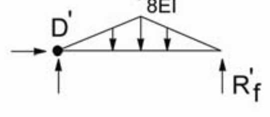
$\sum Fy = \circ \Rightarrow R_B + R_F - P - \frac{P}{2} = \circ$

$R_D = \frac{5}{4}P$

کنترل $\sum M_F = PL - P\times 5L + \frac{5}{4}P\times 2L + 2PL - \frac{P}{2}\times L = \circ$ ok

تحلیل تیر مزدوج و محاسبه ی برش و لنگر در نقاط مختلف آن

$\sum M_{D'} = \circ$



$$R'_F=\frac{\frac{PL}{8}\times\frac{L}{2}\times\left(L+\frac{L}{3}\right)+\frac{PL}{8EI}\times\frac{L}{2}\times\frac{2L}{3}}{2L}=\frac{PL^2}{16EI}$$

$$\sum Fy=\circ\Rightarrow RC=.....$$

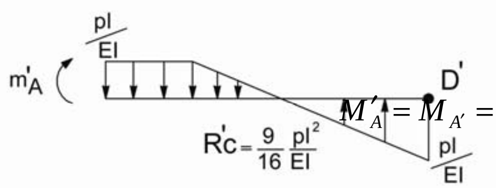
$$R'C=\frac{PL}{EI}\times L+\frac{PL}{EI}\times\frac{L}{2}-\frac{PL}{EI}\times\frac{2L}{2}+\frac{PL}{8EI}\times L-\frac{PL^2}{16EI}$$

$$R'C=\frac{9}{16}\times\frac{PL^2}{EI}$$

$$\sum M_{D'}=\circ$$

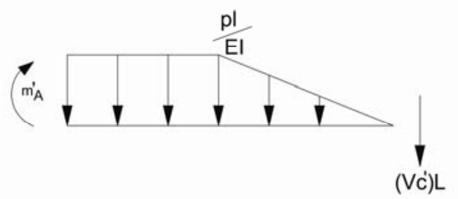
$$M'_A=\frac{PL}{EI}\times L\times\left(3L+\frac{L}{2}\right)+\frac{PL}{EI}\times\frac{L}{2}\times\left(2L+\frac{2L}{3}\right)-\frac{Z}{16}\times\frac{PL^2}{EI}\times 2L-\frac{PL}{EI}\times\frac{2L}{2}\times\frac{2L}{3}$$

$$\Rightarrow M'_A=\frac{73}{24}\times\frac{PL^3}{EI}$$



$$M'_A=M_{A'}=\frac{73}{24}\times\frac{PL^3}{EI}$$

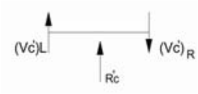
$$y_A=M_{A'}=\frac{73}{24}\times\frac{PL^3}{EI}\downarrow$$



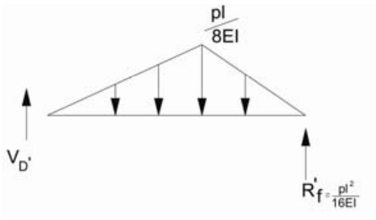
$$(\theta c)_l=(V\acute{c})_l=-\frac{PL}{EI}\times L-\frac{PL}{EI}\times\frac{L}{2}$$

$$(\theta c)_l=-\frac{3}{2}\frac{PL^2}{EI}$$ پادساعتگرد

$$(\theta c)_R = (V\acute{c})_R = Rc + (V\acute{c})_L = \frac{9}{16}\frac{PL^2}{EI} + \left(-\frac{3}{2}\frac{PL^2}{EI}\right) = -\frac{15}{16}\frac{PL^2}{EI}$$ پاد ساعتگرد



$$\theta d = V_D' = \frac{PL}{8EI} \times L - \frac{PL^2}{16EI} = \frac{PL^2}{16EI}$$ ساعتگرد



روش تیر مزدوج برای تحلیل تیرهای نامعین خمشی:

در قسمت قبل در روش تیر مزدوج برای تعیین تغییر مکان ها و دوران های تیرهای معین خمشی به کار رفت.

از آنجا که تیر مزدوج تیر اصلی، همواره معین است می توان از روش تیر مزدوج برای تحلیل تیرهای نامعین خمشی و محاسبه ی نمودارهای لنگر و برش آنها استفاده نمود.

برای انجام این کار، گام هایی به شرح زیر اجرا می شوند:

۱- تعیین درجه ی نامعینی تیر (N): این درجه ی نامعینی تنها با در نظر گرفتن اثرهای خمشی محاسبه می شود.

۲- آزاد کردن N واکنش تکیه گاهی از تیر نامعین و قرار دادن واکنش های تکیه گاهی مناسب در محل های تکیه گاه های رها شده، به گونه ای که یک تیر معین و پایدار بدست آید.

۳- استفاده از روش تیر مزدوج در تیر معین شده و محاسبه ی تغییر مکانهای تکیه گاه های رها شده.

در این مرحله، نمودار لنگر تیر معین شده با استفاده از روش جزء به جزء و نیز به کارگیری اصل روی هم گذاری، رسم می شود.

٤- سازگار نمودن تغییر مکان های محل های تکیه گاه های رها شده با تغییر مکانهای واقعی آنها در روی تیر اصلی و بدست آوردن یک دستگاه N معادله، N مجصول.

٥- حل دستگاه N معادله، N مجصول و محاسبه ی واکنش های تکیه گاهی رها شده.

٦- رسم نمودار لنگر خمشی نامعین و برشی آن.

مثال : نمودار لنگر تیر شکل زیر را با روش تیر مزدوج رسم کنید.