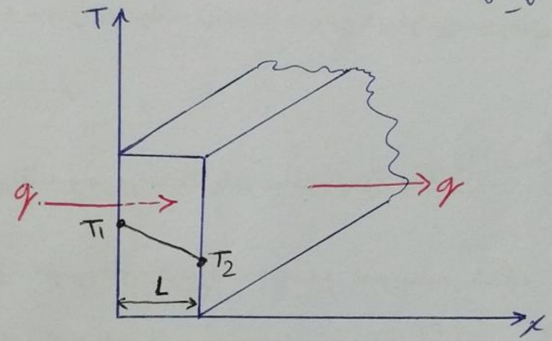
جلسه سوم
انتقال حرارت

شرایط مرزی حل معادله دیفرانسیل انتقال حرارت:

یک انتقال حرارت ساده یک بعدی را در یک دیواره، در حالت دائم و بدون منبع داخلی انرژی در نظر بگیرید. همانطور که می‌دانیم معادله دیفرانسیل انتقال حرارت، مطابق آنچه داشتیم به شکل زیر می‌شود:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$



اگر معادله درجه اول به شکل زیر در نظر بگیریم، در معادله دیفرانسیل ارائه شده صدق می‌کند و یا به عبارتی می‌توان گفت که تغییرات دما در دیواره‌ای به مشخصات فوق خطی می‌باشد.

$$T(x) = Ax + B$$

اگر از ابتدای درس انتقال حرارت بخاطر داشته باشید، تغییرات دما در دیواره مورد بررسی خطی فرض شده و حال به روشنی می‌توان دریافت که چرا این فرض در چنین دیواره‌هایی انجام گرفت. قدم بعدی یافتن ضرایب ثابت معادله یعنی A و B می‌باشد که این ضرایب ثابت با استفاده از ویژگی‌های مرز مسئله مورد بررسی بدست می‌آید. به این مرحله از کار برای تشکیل معادله تغییرات دما، اعمال شرایط مرزی می‌گویند.

شرایط مرزی در شکل بالا، دماهای ثابت در هر دو طرف دیواره می‌باشند:

$$T(0) = T_1 \Rightarrow T_1 = A \times 0 + B$$

$$T(L) = T_2 \Rightarrow T_2 = AL + B$$

بنابراین با حل همزمان معادلات فوق می‌توان ضرایب A و B را محاسبه کرد، که در این مسئله می‌شود:

$$B = T_1$$

$$A = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

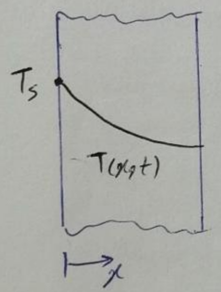
با جایگذاری ضرایب ثابت A و B، معادله دما در دیواره به شکل زیر می‌شود که معادله یک خط راست است.

$$T(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$$

شرایط مرزی اعمال شده در مثال فوق، شرط مرزی دما ثابت نام دارد. به طور کلی برخی از شرایط مرزی که بیشتر با آن‌ها سروکار داریم به شرح زیرند:

۱- دما ثابت:

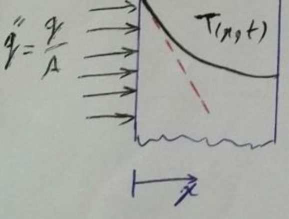
دما در حالت کلی تابع مکان و زمان است، لذا در اعمال شرایط مرزی دما ثابت داریم:



$$T(0,t) = T_s$$

2- شار حرارتی ثابت:

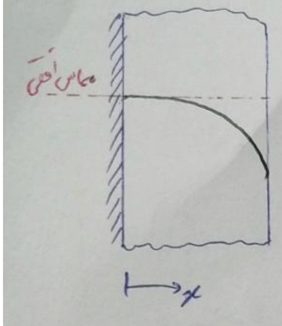
هنگامی که شرایط شار حرارتی عبوری از یک مرز را طوری فرض کنید که انتقال حرارت مقدار ثابتی است، که در این صورت داریم:



$$-k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = constant = q''$$

در حالتی که شار حرارتی در مرز مقدار ثابت باشد، شیب پروفیل دما در آن مرز ثابت است و با گذر زمان تغییر نمی‌کند.

3- مرز عایق :



این حالت در واقع یکی از حالات خاص شرایط مرزی شار حرارتی ثابت است. از آنجا که یکی از مرزها کاملاً عایق شده است، شار عبوری از آن صفر است.

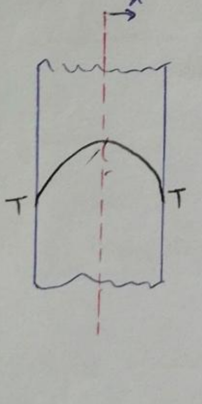
$$-kA\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0$$

توجه کنید که $\frac{\partial T}{\partial x}$، گرادیان دما در جهت x می‌باشد، لذا صفر شدن آن در هر نقطه، بیانگر این امر است که در آن نقطه هیچ گرادیان دمایی نداریم و شیب پروفیل دما صفر است. بنابراین می‌توان گفت که در مرز عایق مماس بر پروفیل دما افقی می‌باشد.

4- شرایط جابجایی در مرز :

بحث در خصوص این نوع شرایط مرزی مستلزم آشنایی با انتقال حرارت به روش جابجایی می‌باشد. در این حالت انتقال حرارت‌های جابجایی و هدایت را در این مرز برابر قرار می‌دهند.

5- شرط تقارن :



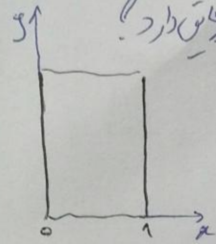
در حالتی که پروفیل [illegible] با توجه به شرایط و هندسه مسئله متقارن باشد، چنین شرایطی در محل خط تقارن برقرار است. در این حالت، مماس بر پروفیل دما، افقی می‌باشد. یعنی:

$$\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0$$

شرایط مرزی فقط مرزهای مکانی را شامل نمی‌شود، بلکه در مورد مرزهای زمانی نیز برقرار است.

* تعداد شرایط مرزی لازم برای تکمیل معادله‌ها به مرتبه معادله دیفرانسیل بستگی دارد. مثلاً مثال معادله دیفرانسیل انتقال حرارت یک بعدی در حالت پایدار از مرتبه دو نسبت به مکان است و به دو شرط مرزی مکانی نیاز دارد.

سؤال: تابع توزیع دما در چند دیواره به صورت زیر معرفی شده است. اگر عرض همه دیواره‌ها یک متر باشد کدام دیواره مرز عایق دارد؟



1- $T=\frac{1}{2}x^2-x+4$

2- $T=x^3+x+30$

3- $T=x^2-\frac{1}{2}x$

مرزهای دیواره‌های مسئله ما $x=0$ و $x=1$

می‌دانیم اگر در مرزی $\frac{dT}{dx}=0$ باشد آن مرز عایق است.

بنابراین:

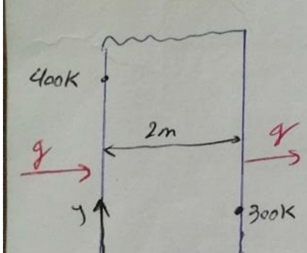
(1) $\frac{dT}{dx}=x-1 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \longrightarrow \frac{dT}{dx}=-1 \\ x=1 \longrightarrow \boxed{\frac{dT}{dx}=0} \end{cases}$

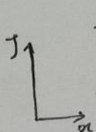
(2) $\frac{dT}{dx}=3x^2+1 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \longrightarrow \frac{dT}{dx}=1 \\ x=1 \longrightarrow \frac{dT}{dx}=4 \end{cases}$

(3) $\frac{dT}{dx}=2x-\frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} x=0 \longrightarrow \frac{dT}{dx}=-\frac{1}{2} \\ x=1 \longrightarrow \frac{dT}{dx}=1.5 \end{cases}$

سؤال: معادله دما در انتقال حرارت در دیواره‌ای ساده مطابق شکل در حالت پایدار به شکل زیر شده است. با توجه به شرایط مرزی نشان داده شده A و B را بدست آورید؟

$T(x)=Ax+B$



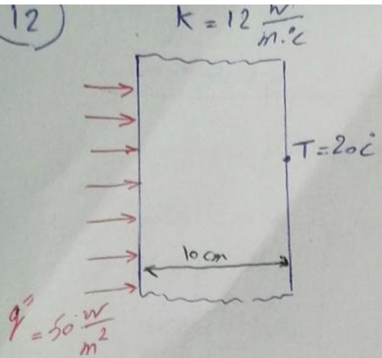


$T(0)=B=400$

$T(2)=A\times 2+400=300 \longrightarrow A=-50$

سؤال: دیواره شکل زیر در حال انتقال حرارت پایدار و یک بعدی در جهت x می‌باشد. سمت چپ دیواره شار ثابتی معادل ۵۰ $\frac{W}{m^2}$ وارد سطح و سمت راست دیواره دمای ثابت 20 C را دارد. معادله پروفیل دما را بدست آورید؟

(12)



$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T = Cx + D$$

پروفیل دما خطی است. شرایط مرزی را به صورت زیر اعمال می‌کنیم:

شرط مرزی شار حرارتی ثابت:

$$x = 0 \longrightarrow \frac{q}{A} = 50$$

$$\Rightarrow -k \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -12(C) = 50 \Rightarrow C = \frac{-25}{6}$$

شرط مرزی دما ثابت:

$$x = 0.1 \longrightarrow T = 20°C$$

$$\Rightarrow 20 = 0.1C + D \Rightarrow 20 = 0.1\left(\frac{-25}{6}\right) + D \Rightarrow D = \frac{1225}{60}$$