جلسه هشتم

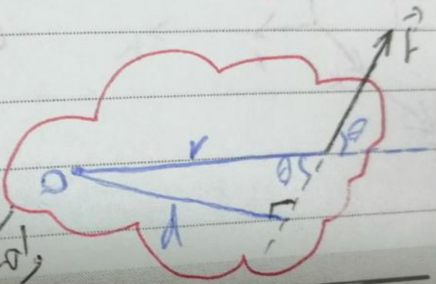
استاتیک

گشتاور نیرو حول یک نقطه

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r}$ ← بردار موقعیت

$\vec{F}$ ← نیرو



واحد گشتاور N.m در SI

lb.in در E.I انگلیسی

شنبه	۲۵
۱شنبه	۲۶
۲شنبه	۲۷
۳شنبه	۲۸
۴شنبه	۲۹
۵شنبه	۳۰

بردار گشتاور:

۱- مقدار آمده: بردار گشتاور یک بردار آزاد

۲- راستا و امتداد: طبق قانون انگشتان دست راست.

۳- جهت: طبق قانون انگشتان دست راست (طبق قرارداد خلاف عقربه‌های ساعت (ccw) جهت مثبت خواهد بود.

۴- مقدار:

$$\begin{cases} M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta \\ r\sin\theta = d \rightarrow M = F \cdot d \end{cases}$$

→ فاصله عمودی امتداد تا محل گشتاورگیری

دو بعدی

$$\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j}$$

سه بعدی

$$M = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

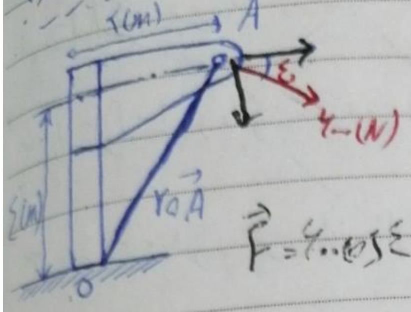
اندازه:

$$|\vec{M}| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_x = \frac{M_x}{M} \\ \cos\theta_y = \frac{M_y}{M} \\ \cos\theta_z = \frac{M_z}{M} \end{cases}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

مثال: مقدار گشتاوری را که نیروی 600N حول نقطه O ایجاد می‌کند را از سه روش محاسبه کنید



الف) روش برداری

$\vec M = \vec r \times \vec F$

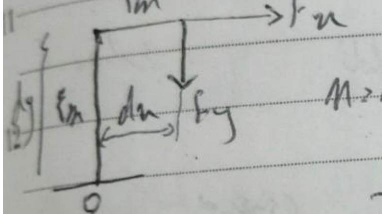
$\vec r_{OA} = (x_A - x_O)\vec i + (y_A - y_O)\vec j \rightarrow \vec r_{OA} = 2\vec i + 4\vec j$ بردار موقعیت

$\vec F = 600\cos 40\,\vec i - 600\sin 40\,\vec j \rightarrow \vec F = 460\,\vec i - 386\,\vec j$ بردار نیرو

$\vec M = (2\vec i + 4\vec j) \times (460\,\vec i - 386\,\vec j) = -772\,\vec k - 1840\,\vec k = -2612\,\vec k$

این روش در مسائل سه‌بعدی کاربرد دارد

ب) روش عددی

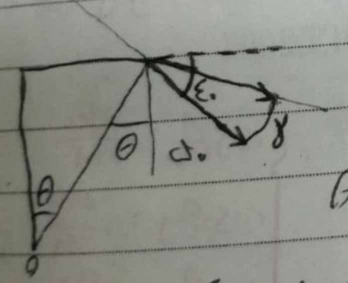


$M = F\cdot d \rightarrow M = M_1 + M_2 \rightarrow \begin{cases} M_1 = F_x \cdot d_y = 600\cos 40 \times 4 = 1840 \\ M_2 = F_y \cdot d_x = 600\sin 40 \times 2 = 772 \end{cases}$

$M = 2612$

این روش در دو بعدی کاربرد دارد.

ج) روش سریع

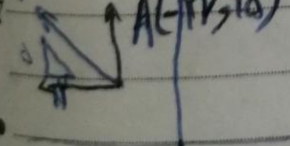


$\vec{OA} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4.47$

$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{4} = 26.56$

$M = F\cos\gamma \times 4.47 \Rightarrow M = 600\cos 13.43 \times 4.47 \rightarrow M = 2608$

مثال: گشتاور نیروی F را حول نقطه O با سه روش بدست آورید!



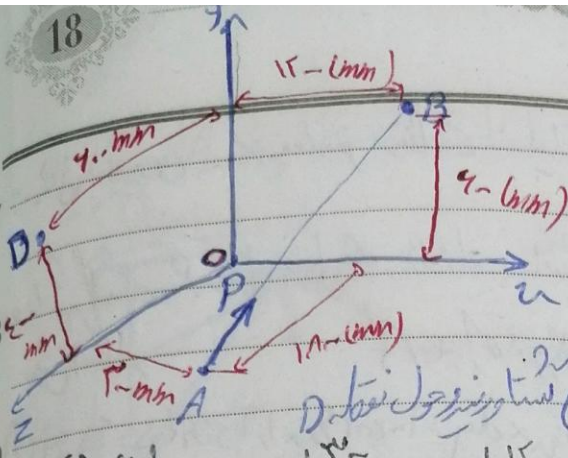
$\vec M = \vec r_{OA} \times \vec F$

$\theta = \tan^{-1}\frac{5}{12} = 22.62$

$\vec r_{OA} = -27\vec i + 15\vec j$

$\vec F = -34\cos 22.62\,\vec i + 34\sin 22.62\,\vec j$

$\vec M = (-27\vec i + 15\vec j) \times (-31.15\,\vec i + 9.23\,\vec j) \Rightarrow M = -249.23\,\vec k + 332.25\,\vec k = 83.02$



مثال: نیروی معادل ۴۵۰ N در راستای AB اعمال می‌گردد. تعیین نمائید الف) گشتاور نیروی فوق حول مبدأ مختصات ب) گشتاور نیرو حول نقطه D

$P = 450\ (N)$

$A \left| \begin{matrix} 300 \\ 0 \\ 1800 \end{matrix} \right.$ $\quad B \left| \begin{matrix} 1200 \\ 600 \\ 0 \end{matrix} \right.$ $\quad D \left| \begin{matrix} 0 \\ 400 \\ 600 \end{matrix} \right.$

$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$

بردار وضعیت: $\vec{r}_{OA} = (300-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (1800-0)\vec{k} \rightarrow \vec{r}_{OA} = 300\vec{i} + 1800\vec{k}$

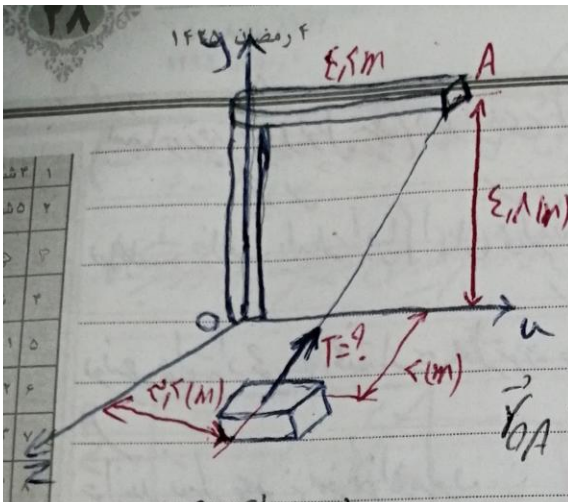
$\vec{F} = F \cdot \vec{\lambda}_{AB} = 450 \times \dfrac{900\vec{i} + 600\vec{j} - 1800\vec{k}}{\underbrace{\sqrt{900^2 + 600^2 + 1800^2}}_{2100}} = 192{,}85\vec{i} + 128{,}57\vec{j} - 385{,}71\vec{k}$

$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 300 & 0 & 1800 \\ 192{,}85 & 128{,}57 & -385{,}71 \end{vmatrix} = -231{,}42 \times 10^3 \vec{i} + 462{,}84 \times 10^3 \vec{j} + 38{,}571 \times 10^3 \vec{k}\ (N.mm)$

$\vec{M}_D = \vec{r}_{DB} \times \vec{F} = (1200\vec{i} + 200\vec{j} - 600\vec{k})(192{,}85\vec{i} + 128{,}57\vec{j} - 385{,}71\vec{k}) =$

$= 347{,}13 \times 10^3 \vec{j} + 115{,}7 \times 10^3 \vec{k}\ (N.mm)$

مثال: در شکل روبه‌رو [illegible] تحت کشش قرار دارد. اگر گشتاور ایجاد شده توسط کشش کابل حول مبدأ مختصات به صورت $\vec{M}_O = 10\vec{i} + 6\vec{j} + 16\vec{k}$ بیان شود کشش کابل T را تعیین نمائید.



$A\,|\,4.2,\ 4.8,\ 0 \qquad B\,|\,3.2,\ 0,\ 2 \qquad O\,|\,0,\ 0,\ 0$

$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{T}$

$\vec{r}_{OA} = 4.2\vec{i} + 4.8\vec{j}$ = بردار موقعیت

$M_O = 10\vec{i} + 6\vec{j} + 14\vec{k}\ (kN.m)$

بردار نیرو

$\vec{T} = T.\vec{\lambda}_{BA} = T.\dfrac{1\vec{i} + 4.8\vec{j} - 2k}{\underbrace{\sqrt{1^2 + 4.8^2 + 2^2}}_{5.29}} \rightarrow T = 0.188T\vec{i} + 0.906T\vec{j} - 0.377T\vec{k}$

$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4.2 & 4.8 & 0 \\ 0.188T & 0.906T & -0.377T \end{vmatrix} = [4.8(-0.377T)]i - [(4.2)\times(-0.377T)]j +$

$[4.2(0.906T) - (4.8)\times(0.188T)]\vec{k} \rightarrow M_O = -1.809T\vec{i} + 1.583T\vec{j} + 2.9T\vec{k}$

$M_x \Rightarrow -1.809T = 10 \Rightarrow T = -5.52$ چون جهت کشش کابل مثبت است بنابراین منفی نمی‌تواند باشد.

$M_y \Rightarrow 6 = 1.583T \rightarrow T = 3.79$

$M_z \Rightarrow 14 = 2.9T \rightarrow T = 5.51$ بیشترین عدد را در نظر می‌گیریم.