بسمه تعالی

سه جلسه اول درس تجزیه و تحلیل سیگنالها و سیستم ها

حمید شریفیان

ترم دوم تحصیلی ۹۸–۹۹

فصل اول
معرفي سيگنال هاي زمان پيوسته و زمان گسسته

تعريف سيگنال : تابعي از يك يا چند متغير مستقل است نظير سيگنال صحبت خروجي يك ميكروفن .

تعريف سيستم : سيستم را مي توان به شكل دستگاهي در نظر گرفت كه سيگنال هاي ورودي را گرفته و براساس ساختار دستگاه يك سيگنال خروجي را مي دهد .

طبقه بندي سيگنال :

1 - **پيوسته :** اين سيگنال ها به صورت پيوسته در زمان بوده و با x(t) نشام داده مي شود .

2 - **گسسته :** سيگنالهاي گسسته به صورت گسسته در زمان بوده و با x[n] نشان داده مي شود . (اين سيگنال در حقيقت از سيگنال هاي پيوسته گرفته مي شود .)

نكته : سيگنال هاي فيزيكي طبيعي نظير سيگنال صحبت سيگنال هاي پيوسته مي باشند . براي پردازش بهتر اين سيگنال ها آنها را به حالت گسسته در مي آورند . براي اين منظور از سيگنال پيوسته نمونه برداري مي شود و ثابت مي شود اگر تعداد نمونه ها در واحد زمان از يك مقدار مشخص بيشتر باشد مي توان از روي سيگنال گسسته مجددا سيگنال پيوسته را بازسازي نمود .

سيگنال هاي انرژي و توان :

1 - **انرژي :** سيگنال هاي محدود در زمان

2 - **توان :** سيگنال هاي نا محدود در زمان

نكته : معمولا سيگنال ها از جنس ولتاژ يا جريان هستند و مقدار توان دو ولتاژ يا جريان متناسب است . بر اين اساس انرژي كل يك سيگنال به صورت زير تعريف مي شود :

1 - در حالت پيوسته :

$$E = \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$

2 - در حالت گسسته :

$$E = \sum_{x=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2N+1}} \sum_{\mathbf{x=-N}}^{\mathbf{N}} |\mathbf{x[n]}|^2$$

نکته : سیگنال هایی که محدود زمان باشند دارای انرژی محدود هستند و توان متوسط آنها صفر است . به این سیگنال ها سیگنال انرژی گفته می شود .
نکته : سیگنال هایی که نا محدود زمان باشند دارای انرژی بی نهایت هستند و توان متوسط آنها محدود است . به این سیگنال ها سیگنال توان گفته می شود .

تبدیلات سیگنال ها :

1 -شیفت زمانی :

$$y(t) = x(t - t_0)$$
$$y[n] = x[n - n_0]$$

شیفت به راست : اگر t>0 باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت راست شیفت می دهیم تا y(t) بدست آید .
شیفت به چپ : اگر t<0 باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت چپ شیفت می دهیم تا y(t) بدست آید .

2 - معکوس شدن زمان :

$$y(t) = x(-t)$$
$$y[n] = x[-n]$$

X(-t) یا x[-n] انعکاس x(t0 یا x[n] نسبت به محور قائم هستند .

3 - فشرده شدن زمان :

$$y(t) = x(at) \qquad a \in R$$
$$y[n] = x[an] \qquad a \in R$$

حالت پیوسته :
الف) اگر $|a| > 1$ باشد y(t) فشرده شده سیگنال x(t) خواهد بود .
ب) اگر $|a| > 1$ باشد y(t) باز شده سیگنال x(t) خواهد بود .
ج) اگر $a < 0$ باشد باید بعد از تغییر مقیاس ، وارون زمانی انجام داد.

تذکر :اگر سیگنال زمان پیوسته و یا زمان گسسته متناوب باشند، در اثر تغییر مقیاس زمانی در اثر فشرده شدن، دوره تناوب سیگنال جدید کم شده و در اثر باز شدن، دوره تناوب سیگنال جدید افزایش می یابد.

تذکر : $y[n] = x[kn]$ نسبت به x[n] فشرده شده، که برخی از مقادیر را از دست می دهد.

تذکر :در زمان پیوسته ماهیت سیگنال عوض نمی شود، اما در زمان گسسته ماهیت سیگنال تغییر می کند و سیگنال جدیدی بدست می آید .

تذکر : $y[n] = x[\frac{1}{k}n]$ نسبت به x[n] باز شده که در نتیجه تعدادی صفر به y[n] اضافه خواهد شد .بدین ترتیب ماهیت سیگنال گسسته در اثر تغییر مقیاس زمانی تغییر می کند.

نکته : x(at-B) : همیشه ابتدا شیفت به اندازه B انجام شده سپس به اندازه a فشرده می شود .

سیگنال متناوب (پریودیک) :

سیگنال متناوب به سیگنالی گفته می شود که در بازه های زمانی مشخص عینا تکرار شده باشد.

X(t) = x(t+T)　　پریودیك با دوره تناوب T

X[n] = x[n+N]　　پریودیك با دوره تناوب N

سیگنال های زوج و سیگنال های فرد :

1 - سیگنال زوج : $Even\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$

2 - سیگنال فرد : $Odd\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)\}$

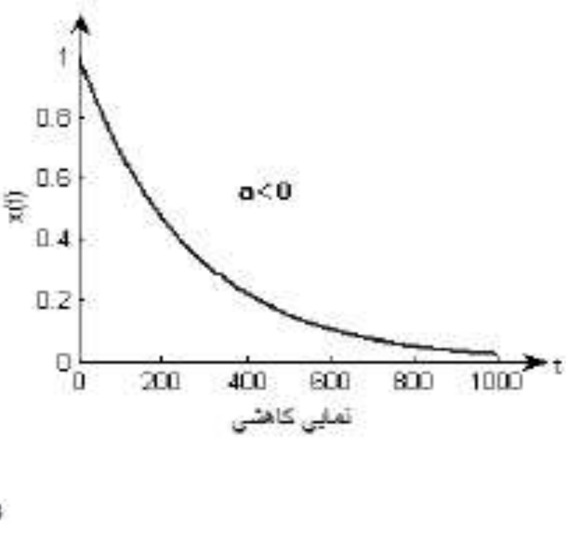
در نتیجه و با توجه به قسمت فرد و زوج سیگنال خواهیم داشت :

$$x(t) = Even\{x(t)\} + Odd\{x(t)\}$$

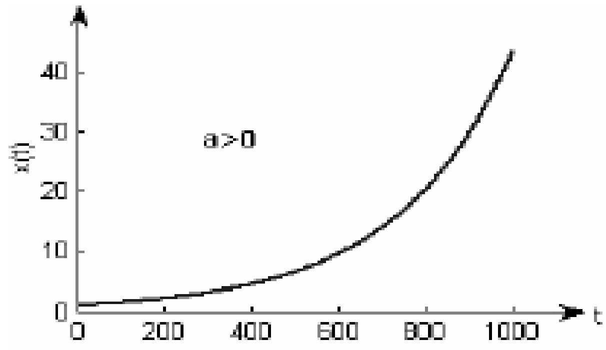
معرفی سیگنال های مهم :

1 - سیگنال نمایی حقیقی :

پیوسته　　$x(t) = Ce^{at}$



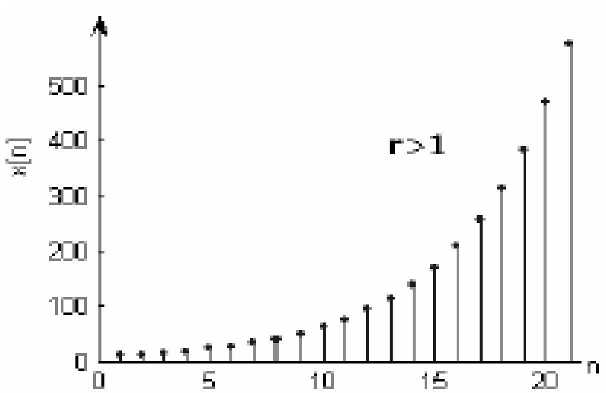
نمایی کاهشی



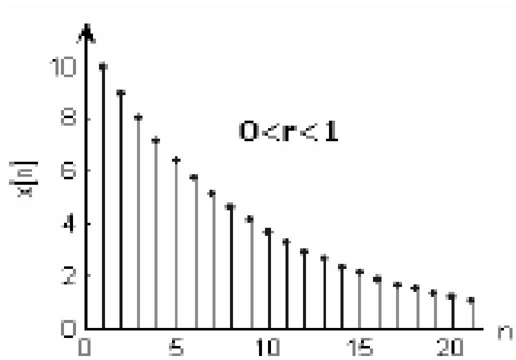
نمايي افزايشي

تذکر :چنانچه دامنه سيگنال خروجي سيستمي با افزايش زمان به طور نامحدود زياد شود، سيستم تحت بررسي به عنوان سيستم ناپايدار شناخته مي شود.

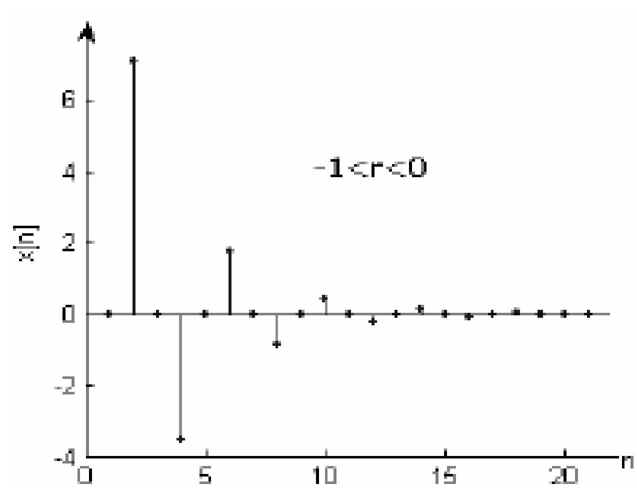
گسسته $x(t) = Cr^n$



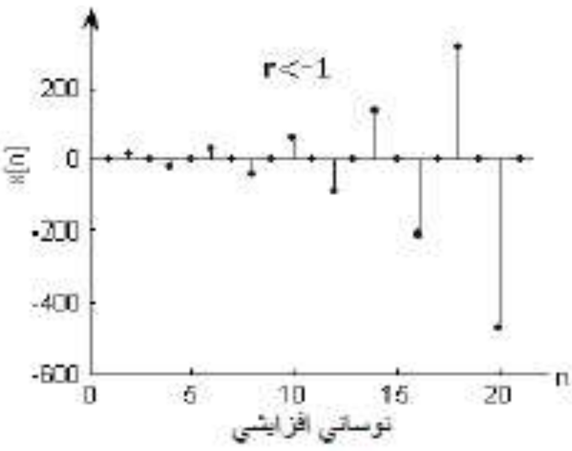
نمايي افزايشي



نمايي کاهشي



نوساني کاهشي



2 - سيگنال سينوسي :

پيوسته : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

تذكر :سيگنال سينوسي همواره متناوب و با دوره تناوب T است .

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

گسسته : $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$

$$\omega_0 = 2\pi \frac{k}{N}$$

تذكر :سيگنال زمان گسسته سينوسي به شرطي متناوب است كه بتوان $N \in Z^+$ را بدست آورد به نحوي كه $x[n] = x[n+N]$ گردد . (اين سيگنال برخلاف سيگنال زمان پيوسته سينوسي بعضا متناوب نيست.)

3 - سيگنال نمايي مختلط :

پيوسته : $x(t) = Be^{-j\omega t}$ يا $x(t) = Be^{j\omega t}$

گسسته : $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

نكته : سيگنال هاي نمايي موهومي گسسته (نمايي مختلط) يا سيگنال هاي سينوسي گسسته زماني پريوديك است كه ω_0 به صورت ضريب گويايي از عدد π مي باشد .
براي بدست آوردن دوره تناوب ω_0 آنرا به صورت ضريب گويايي از 2π مي نويسيم و مخرج دوره تناوب سيگنال را نشان مي دهد .

مثال :

$$\cos\frac{\pi}{7}n \quad => \quad \omega_0 = 2\pi * \frac{1}{14} \quad => \quad N = 14$$

$$\cos\frac{3\pi}{7}n \quad => \quad \omega_0 = 2\pi * \frac{3}{14} \quad => \quad N = 14$$

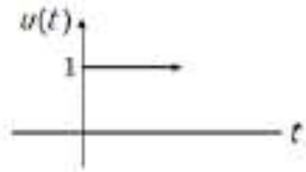
نكته : در عبارت گويايي كه ضريب 2π است بيانگر اين است كه پس از چند پوش سيگنال رشته N تكرار مي شود .

سيگنال هاي پايه :

1-1 - سيگنال پايه واحد :

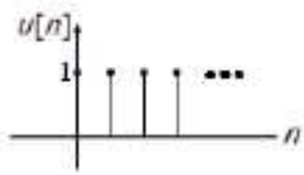
پيوسته :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



گسسته :

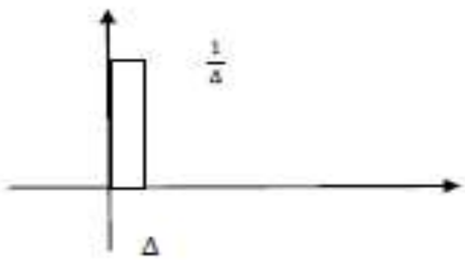
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n \leq -1 \end{cases}$$



تذكر :توابعي كه فرم هندسي دارند را مي توان بر حسب تابع پله بيان كرد .

1 2 - **تابع پالس :** فقط در حوزه پیوسته می باشد .

$$u_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \le t \le \Delta \\ 0 \begin{cases} \Delta < t \\ \Delta < 0 \end{cases} \end{cases}$$



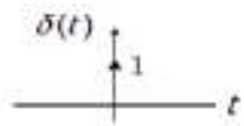
تابع پالس براساس سیگنال پله واحد :

$$u_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}u(t) - \frac{1}{\Delta}u(t-\Delta)$$

1 3 - **تابع ضربه :**

پیوسته :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{0^-}\delta(t)dt = 0$$

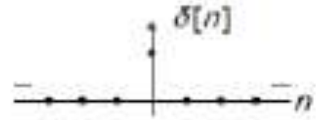


$$\delta(t) = 0 \quad => \quad \begin{cases} t > 0 \\ t < 0 \end{cases}$$

رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد در حالت پیوسته :

$$\delta(t) = \frac{d_u(t)}{dt}$$

گسسته :



رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد در حالت گسسته :

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

نکته پیوسته :

$$y(t) = \frac{d_x(t)}{dt}$$

نکته گسسته :

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

نکته : تابع $y[n] = x[n] - x[n-1]$ معادل مشتق گیری از تابع $x[n]$ در حوزه پیوسته می باشد .

نکته پیوسته :

$$u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

نکته گسسته :

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

خواص تابع ضربه :

1 - خاصیت فشردگی :

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \quad , \quad \delta(t) = \delta(-t)$$

2 - خاصیت غربالی تابع ضربه :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,.\,\delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)$$

سيستم ها :

سيستم را مي توان به صورت دستگاهي در نظر گرفت كه بر روي سيگنال هاي ورودي اعمالي را انجام داده و خروجي بر اساس ساختار داخلي سيستم مي دهد . در حقيقت سيستم تابعي بر حسب سيگنال ورودي مي باشد (ساختاري كه روي سيگنال ها اعمالي را انجام مي دهد .)

خواص سيستم ها :

1 - **حافظه دار يا بدون حافظه بودن :** سيستمي بدون حافظه است كه خروجي آن در هر لحظه به ورودي در همان لحظه بستگي داشته باشد و به لحظات ديگر وابسته نباشد .

2 - **معكوس پذيري :** اگر بتوان از روي خروجي سيستم دوباره ورودي را بازسازي كرد سيستم معكوس پذير است .

3 - **عليت :** اگر ورودي سيستم صرفا به زمانهاي حال و گذشته بستگي داشته باشد سيستم علي است و اگر به آينده بستگي داشته باشد سيستم غير علي است .

4 - **پايداري به مفهوم *BIBO* :** سيستمي پايدار به مفهوم BIBO است كه به ازا ورودي محدود خروجي آن محدود است .

5 - **تغيير ناپذيري با زمان (*TI*) :** براي بررسي تغيير ناپذيري با زمان يكبار $x(t-t_0)$ را وارد سيستم مي كنيم خروجي را بدست مي آوريم و يكبار $\boldsymbol{y(t-t_0)}$ را تشكيل مي دهيم . اگر دو حالت برابر شود سيستم تغيير ناپذير با زمان است .

6 - **خطي بودن :** سيستم خطي به سيستمي گفته مي شود كه اصل جمع آثار براي آن صدق كند .

شرط خطي بودن :

همگن: $ax(t) \longrightarrow \boxed{\text{system}} \longrightarrow ay(t)$

جمع پذير: $x_1(t)+x_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{system}} \longrightarrow y_1(t)+y_2(t)$

نكته : فشرده سازي در سيستم هاي پيوسته معكوس پذير ولي در سيستم هاي گسسته معكوس ناپذير است .

خلاصه :

سيگنال تابعي است كه حاوي اطلاعاتي درباره رفتار فيزيكي يك سيستم است.

هر سيگنال دلخواه را مي توان به صورت مجموع دو سيگنال زوج و فرد نوشت.

در بسياري از مسائل با استفاده از شيفت زماني مي توان سيگنال را به صورت زوج يا فرد درآورد.

كوچكترين دوره تناوب سيگنال دوره تناوب اصلي است و فركانس متناسب با دوره تناوب اصلي فركانس اصلي است.

توابعي كه فرم هندسي دارند را مي توان بر حسب توابع ويژه بيان كرد.

توابع ضربه واحد، پله واحد و دوبلت واحد خواص منحصر به فردي دارند.

اگر سیستمی با ورودی محدود و خروجی نامحدود داشتیم این سیستم ناپایدار است.

سیستم بدون حافظه مطمئنا علی است.

تمرینات آخر فصل :

1 - تعیین کنید کدام یک از سیگنال های زیر متناوبند ؟

الف: $x_2[n] = u[n] + u[-n]$

ب: $x_3[n] = \sum \delta[n-4k] - \delta[n-1-4k]$

ج: $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{-j\frac{2\pi}{7}n}$

2 - تعیین کنید کدام یک از سیگنا ل های زیر معکو س پذیر است؟

الف: $y[n] = x[n]x[n-2]$

ب: $y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n = 0 \\ x[n] & n \le -1 \end{cases}$

3 - آیا این سیستم معکو س پذیر است یا نه؟ اگر هست معکوس آن را به دست آورید.

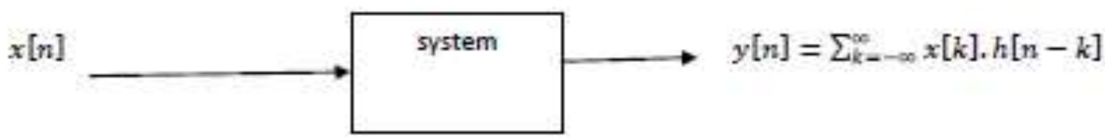
$$y[n] = \begin{cases} x[n-1] & n \ge 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n] & n \le -1 \end{cases}$$

فصل دوم
سيستم هاي خطي و تغيير ناپذير با زمان (LTI)

سيستم هاي LTI داراي خصوصيت مهمي هستند كه اگر پاسخ سيستم به ورودي ضربه را داشته باشيم مي توان پاسخ را به هر ورودي ديگر بدست آوريم .

براساس خاصيت غربالي تابع ضربه مي توان هر سيگنالي را به صورت تركيب خطي از سيگنال هاي ضربه نوشت. بنابراين اگر پاسخ سيستم به تابع ضربه را داشته باشيم مي توان پاسخ سيستم را به هر ورودي ديگر بدست آوريم .

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].\delta[n-k]$$



كانولوشن گسسته :

$$\boldsymbol{x[n] * h[n] = h[n] * x[n] => \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].x[n-k]}$$

در حالت گسسته به دو روش مي توان پاسخ يك سيستم را به يك سيگنال دلخواه بدست آورد :

<u>الف :</u> با استفاده از تعريف كانولوشن

<u>ب :</u> با توجه به پاسخ ضربات سيستم : اگر پاسخ سيستم را داشته باشيم از آنجاييكه سيگنال ورودي را مي توان به صورت مجموعي از توابع ضربه شيفت داده شده نوشت . بايد پاسخ سيستم را به هر كدام از مولفه هاي سيگنال ورودي ($x(t)$) بدست آورد و با هم جمع كرد .

نكته :

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha^k = \frac{\alpha^{m+1} - \alpha^n}{1-\alpha}$$

کانولوشن پیوسته :

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).x(t-\tau)\,d\tau$$

خواص سیستم هاي *LTI* بر اساس پاسخ ضربه :

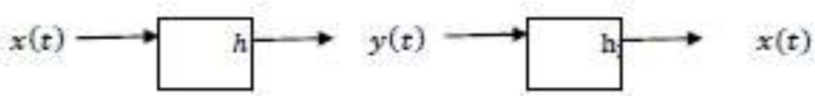
1 - **خاصیت بدون حافظه بودن :** اگر و فقط اگر $h(t) = k\delta(t)$, $h[n] = k\delta[n]$. اگر *h(t)* به صورت ثابتي از $\delta(t)$ باشد در این صورت خروجي سیستم در هر لحظه به ورودي سیستم در همان لحظه بستگي خواهد داشت بنابراین سیستم بدون حافظه خواهد بود .

2 - **خاصیت علیت :** یك سیستم علي است اگر و فقط اگر در حالت پیوسته $t < 0$ $h(t) = 0$ و در حالت گسسته $n < 0$ $h[n] = 0$ باشد .

3 - **خاصیت پایداري :** یك سیستم پایدار است اگر پاسخ ضربه آن مطلقا انتگرال پذیر یا جمع پذیر باشد یعني براي حالت پیوسته $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$ و حالت گسسته $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$.

اگر *h(t)* مطلقا انتگرال پذیر باشد و *x(t)* محدود باشد (یعني به سمت بي نهایت نرود) در این صورت کانولوشن این دو نیز مقدار محدودي خواهد بود و سیستم پایدار خواهد بود .

4 - **خاصیت معکوس پذیري :**



$$y = x(t) * h_1(t)\ ,\ \ x(t) = y(t) * h_2(t) \quad => \quad h_1(t) * h_2(t) = 1$$

اگر $\mathbf{h}_1(t)$ پاسخ ضربه سیستمي باشد و بتوان $\mathbf{h}_2(t)$ را به گونه اي پیدا کرد که عبارت $\mathbf{h}_1(t) * h_2(t) = 1$ برقرار باشد در آن صورت سیستم معکوس پذیر است و معکوس آن داراي پاسخ ضربه $\mathbf{h}_2(t)$ خواهد بود .

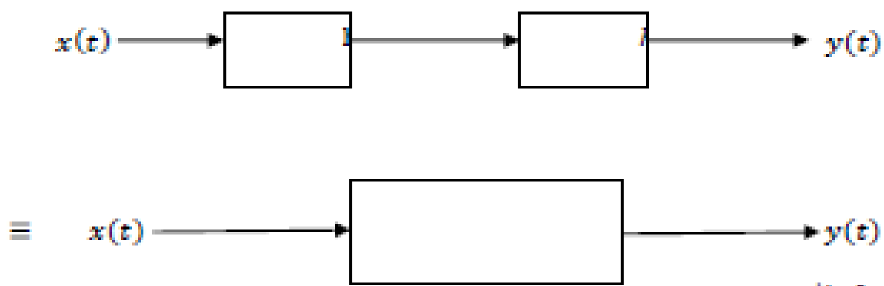
خواص در مرحله کانولوشن :

1 - خاصیت جابجایی : $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$

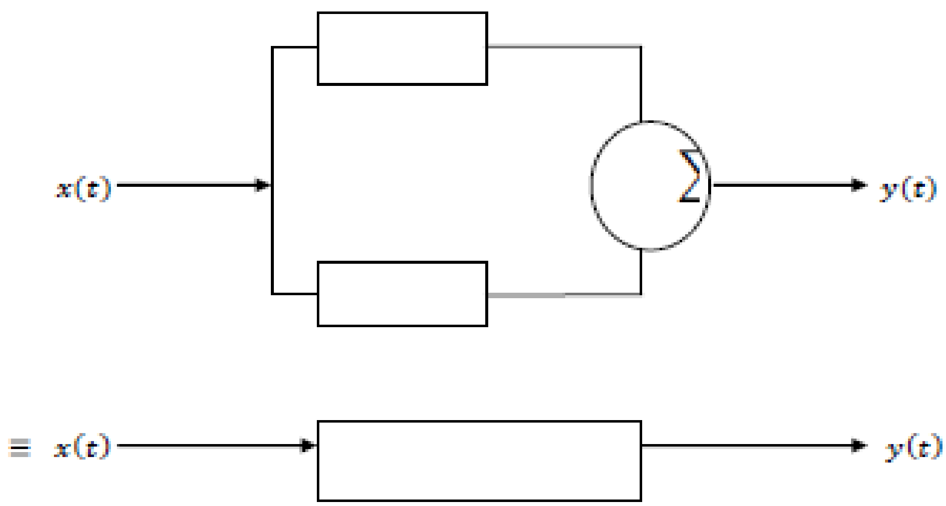
2 - خاصیت شرکت پذیری : $x_1(t) * \left(x_2(t) * x_3(t)\right) = \left(x_1(t) * x_2(t)\right) * x_3(t)$

3 - خاصیت توزیع پذیری : $x_1(t) * \left(x_2(t) + x_3(t)\right) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

<u>الف : سری کردن سیستم ها</u>



<u>ب : موازی کردن سیستم ها</u>



خلاصه :

با توجه به رابطه کانولوشن مي توان خواص جابه جايي پذيري، توزيع پذيري و شرکت پذيري را براي سيستم هاي LTI تعريف کرد .

با معرفي تابع تبديل مي توان خواص جديدي براي سيستم هاي LTI بيان کرد .

کانولوشن به دو روش ترسيمي و فرمول قابل محاسبه است.

در معادلات ديفرانسيل، با حل معادله همگن و يافتن جواب خصوصي به ازاي ورودي خاص، جواب کلي سيستم از جمع پاسخ عمومي و پاسخ خصوصي بدست مي آيد.

براي بکارگيري شرايط سکون جهت تعيين پاسخ سيستم LTI به ورودي داده شده، عنوان علي بودن سيستم ضروري است.

با استفاده از رابطه بين پاسخ ضربه و پاسخ پله در سيستم هاي LTI و يا محاسبه پاسخ ضربه سيستم به طور مستقيم مي توان پاسخ به ورودي ضربه را يافت.

سيستم هاي LTI را با استفاده از بلوک دياگرام نيز مي توان نشان داد.