

فصل دوم

اصول تبدیل انرژی الکترومکانیکی

تبدیل سایر انرژیها به انرژی الکتریکی بصورت کار رایجی در آمده است . مهمترین مزیت این تبدیل آن است که انرژی الکتریکی راحت تر ، مطمئن تر و موثرتر انتقال می یابد ، مورد استفاده قرار می گیرد و کنترل می شود .

دستگاههای مبدل انرژی ابتدا برای تبدیل سایر انواع انرژی به انرژی الکتریکی و سپس برای تبدیل انرژی الکتریکی به دیگر اشکال انرژی مثل صوت ، نور ، گرما یا انرژی مکانیکی ، مورد نیاز می باشند . به عبارت دیگر وسایل و دستگاههای مبدل انرژی در هر دو طرف یک سیستم الکتریکی لازمند . زیرا انرژی در شکل الکتریکی آن قابل دسترسی و مورد نیاز نیست .

یک مثال نمونه نمایش فرآیند تبدیل انرژی ، نیروگاه آبی است که در آن انرژی آب به انرژی الکتریکی تبدیل می شود ، این انرژی از طریق خطوط منتقل و توزیع می گردد و نهایتاً در یک موتور الکتریکی به انرژی مکانیکی تبدیل می شود .

مثال دیگر تبدیل انرژی صوتی به انرژی الکتریکی است که در آن انرژی صوتی در طرف گوینده به انرژی الکتریکی تبدیل شده سپس روی خطوط منتقل می شود و در نهایت در طرف شنونده به امواج صوتی تبدیل می شود .

یک دستگاه مبدل انرژی الکترومکانیکی وسیله ای است که انرژی الکتریکی را به انرژی مکانیکی تبدیل می کند یا اینکه انرژی مکانیکی را به انرژی الکتریکی تبدیل می کند . ماشینهای الکتریکی خطی یا دوار مهمترین مبدلهای انرژی از نقطه نظر مقادیر انرژی تبدیل شده می باشند ، در یک ماشین که بصورت موتور کار می کند انرژی از شکل الکتریکی به مکانیکی تبدیل می شود در حالی که در یک ماشین که بصورت ژنراتور کار می کند ، انرژی از شکل مکانیکی به شکل الکتریکی تبدیل می شود .

این گروه از دستگاهها (یعنی موتورها و ژنراتورها) انرژی را بطور مداوم تبدیل می کنند و برای تبدیل و استفاده مقادیر زیاد انرژی بکار می روند. گروه دوم دستگاههای مبدل انرژی سیگنالهای کم انرژی را به حرکت ارتعاشی تبدیل می کنند مثل گیرنده تلفن، بلندگو، میکروفن، گرامافون و ...

گروه سوم این دستگاهها به دستگاههایی که حرکت انتقالی دارند مربوط می شود و با حرکت مکانیکی محدود خود نیرو یا گشتاور تولید می کنند مثل رله ها - دستگاههای اندازه گیری با آهن گردان - دستگاههای اندازه گیری با قاب گردان - کنتاکتورها و عمل کننده ها و نظائر آنها فرآیند تبدیل انرژی اصولاً "فرآیند برگشت پذیری است اما عملاً" دستگاهها باید به گونه ای طراحی و ساخته شوند که مناسب تبدیل انرژی در یک جهت باشند.

تمام این دستگاههای مبدل انرژی براساس اصول فیزیکی مشابهی کار می کنند و تفاوت آنها در جزئیات ساختمان آنها است. ارتباط بین سیستمهای الکتریکی و مکانیکی در این دستگاهها میدانهای الکتریکی و مغناطیسی است و هدف این فصل ارائه اصول تبدیل انرژی الکترومکانیکی است که بر پایه انرژی این میدان ها قرار دارد.

تجزیه و تحلیل دستگاههای مبدل انرژی توسط مفهوم انرژی میدان بحث کلی و وسیعی است. زیرا برای هر نوع دستگاهی که دارای حرکت دورانی، خطی، ارتعاشی یا انتقالی باشند قابل استفاده است. مزایای این روش عبارتند از:

- ۱ - این روش با بررسی حالتی پایدار و گذرا در ماشینهای مبدل انرژی الکترومکانیکی سروکار دارد.
- ۲ - این روش در ارتباط با عملکرد دستگاههای مبدل انرژی بینش و دید فیزیکی بیشتری می دهد.
- ۳ - این روش ما را به تئوری جامع ماشینهای الکتریکی بطور فیزیکی رهنمون می سازد.
- ۴ - در هر مرحله روش های متداول برای مطالعه اثرات اشباع و کموتاسیون و نظائر آن می تواند مطرح شود.

این فصل با اصول تبدیل انرژی آغاز می شود و سپس روابط نیرو و گشتاور بر حسب متغیرهای میدان بدست می آیند. آنگاه شرایط اساسی لازم برای تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی یا تبدیل انرژی مکانیکی به الکتریکی بوضوح استخراج می شود. ظرفیت ذخیره

انرژی در میدان مغناطیسی بیشتر از میدان الکتریکی است (در حدود ۲۵۰۰۰ برابر) در راستای این حقیقت ، دستگاههای مبدل انرژی که در آنها میدان مغناطیسی به عنوان محیط واسطه بین سیستمهای الکتریکی و مکانیکی عمل می کند کاربرد تجاری بیشتری دارند . در حالی که تاکید بیشتر بر روی اینگونه وسائط تبدیل انرژی است ، اما در این فصل دستگاههایی که در آنها از میدانهای الکتریکی بعنوان میدان واسطه استفاده می شود نیز مورد بحث قرار می گیرند .

۲-۱ اصول تبدیل انرژی

در هنگام تبدیل انرژی از صورتی به صورت دیگر اصول تبدیل انرژی مطرح می گردد . بر طبق این اصول انرژی بخودی خود بوجود نمی آید و یا نابود نمی شود و فقط می تواند از شکلی به شکل دیگر تبدیل شود .

در یک دستگاه مبدل انرژی ، بخشی از انرژی ورودی به شکل مطلوب تبدیل می شود ، بخش دیگر در دستگاه ذخیره می شود و بقیه آن هم تلف می شود .

در همین راستا معادله موازنه انرژی باید شامل این چهار مولفه انرژی باشد که برای حالت موتوری می توان آنرا بصورت زیر نوشت :

$$(۲-۱) \text{ (کل انرژی ورودی) = (انرژی مکانیکی خروجی) + (کل انرژی ذخیره شده) + (کل انرژی تلف شده)}$$

اصل تبدیل انرژی بر پایه معادله (۲-۱) استوار است ، باید توجه داشت که این معادله برای موتور نوشته شده است بطوری که در آن انرژی ورودی الکتریکی و انرژی خروجی مکانیکی مثبت هستند . این تساوی برای عمل ژنراتوری بصورت زیر درمی آید :

$$\text{(کل انرژی مکانیکی ورودی) = (کل انرژی خروجی الکتریکی) + (انرژی ذخیره شده) + (کل انرژی تلف شده)}$$

اشکال گوناگون انرژی در رابطه یا معادله (۲-۱) برای یک دستگاه مبدل انرژی الکترومکانیکی ذیلاً بررسی می شوند :

$$1- \text{ کل انرژی الکتریکی ورودی از منبع: } W_{ei}$$

$$2- \text{ انرژی مکانیکی خروجی: } W_{mo}$$

$$3- \text{ کل انرژی ذخیره شده در دستگاهها} = \text{(انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی } W_{es} \text{) + (انرژی ذخیره شده در سیستم مکانیکی } W_{ms} \text{)}$$

$$4- \text{ کل انرژی تلف شده} = \text{انرژی که در مدار الکتریکی بصورت تلفات اهمی تلف می شود} + \text{انرژی که در هسته مغناطیسی تلف می شود (تلفات پس ماند و تلفات جریانهای}$$

فوکو) + انرژی که در سیستم مکانیکی تلف می شود (تلفات اصطکاک و یاطاقانها و مالش هوا) بنابراین رابطه موازنه انرژی (۲-۱) با مولفه های ویژه زیر نوشته می شود:

$W_{ei} = W_{mo} + (W_{es} + W_{ms}) +$ (تلفات انرژی میدان واسطه + تلفات انرژی اهمی) + (تلفات انرژی مکانیکی) + (تلفات انرژی شده در سیستم مکانیکی) زیر نویسها e و m و i و s و o به ترتیب نشانگر: الکتریکی، مکانیکی، ورودی، ذخیره شده و خروجی هستند. مثلاً "زیر نویس ei نشانگر (انرژی) ورودی الکتریکی و ms نشانگر (انرژی) مکانیکی ذخیره شده است. مولفه های رابطه موازنه انرژی را بصورت زیر گروه بندی می کنیم:

$$(W_{ei} - \text{تلفات انرژی اهمی}) = (W_{mo} + W_{ms} + \text{تلفات انرژی مکانیکی}) + (W_{es} + \text{تلفات انرژی میدان واسطه})$$

(الف: ۲-۲)

و یا: (ب: ۲-۲) $W_{elec} (\text{الکتریکی}) = W_{mech} (\text{مکانیکی}) + W_{fld} (\text{میدان})$
 رابطه (۲-۲) * مارابه مدلیک میدل انرژی الکترومکانیکی رهنمون می سازد. (شکل ۱-۲) تلفات گوناگون مثل تلفات RI^2 و یا تلفات میدان واسطه و تلفات اصطکاک و مالش هوا برگشت ناپذیرند و بصورت گرما تلف می شوند. به انرژی ذخیره شده در میدان واسطه در بخش (ب: ۲-۲) پرداخته می شود.

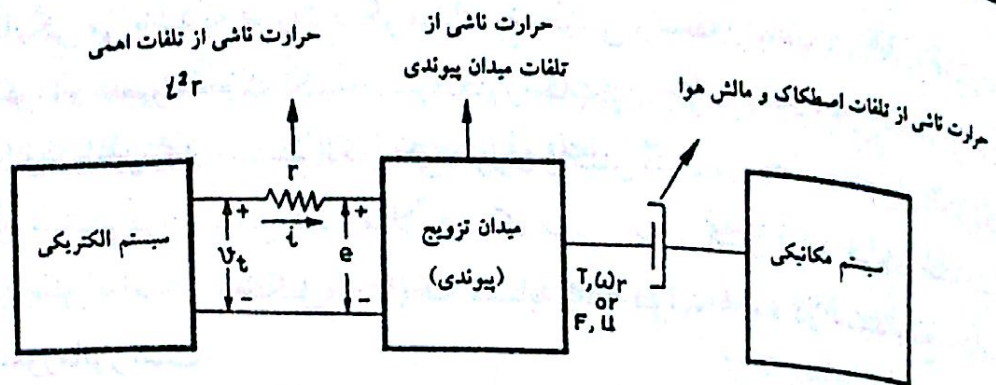
انرژی ذخیره شده در سیسم مکانیکی W_{ms} انرژی جنبشی: $(\frac{1}{2} m v^2)$ برای سیستم با حرکت خطی و $(\frac{1}{2} J \omega_r^2)$ برای سیستم با حرکت دورانی است. در اینجا v سرعت خطی است بر حسب m/s و ω_r سرعت زاویه ای بر حسب رادیان بر ثانیه است. توجه کنید که میدانهای واسطه با emf، e و جریان i در طرف الکتریکی و گشتاور T (یا نیروی F) و سرعتهای ω_r (و یا v) در طرف مکانیکی ارتباط پیدا می کنند.

* اگر گشتاور، سرعت و انرژی میدان واسطه در یک ماشین ثابت بمانند گفته می شود ماشین در شرایط پایدار کار می کند. در این شرایط تغییری در انرژی ذخیره شده W_{ms} و یا W_{es} وجود ندارد. بنابراین رابطه (الف: ۲.۲) بصورت زیر درمی آید:

$$W_{ei} = W_{mo} + \text{تلفات مکانیکی و تلفات میدانهای واسطه}$$

و یا:

توان تلف شده بصورت گرما ناشی از تلفات مختلف + کل توان خروجی = کل توان ورودی
 توجه کنید که در ماشینهای ac تکفاز انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی ثابت باقی نمی ماند و به این دلیل در این ماشینها شار فاصله هوایی ثابت نیست.



شکل ۱-۲: شمای عمومی دستگاه مبدل انرژی الکترومکانیکی

در رابطه (ب: ۲-۲) W_{elec} انرژی الکتریکی خالص ورودی به میدان واسطه است و W_{mech} کل انرژی تبدیل شده به صورت مکانیکی است و برابر است با مجموع انرژی مکانیکی مفید W_{mo} ، انرژی مکانیکی ذخیره شده W_{ms} و انرژی مکانیکی تلف شده W_{fld} کل انرژی جذب شده توسط میدان واسطه است و برابر است با مجموع انرژی ذخیره شده در میدان W_{es} و تلفات انرژی میدان واسطه.

رابطه (ب: ۲-۲) به شکل دیفرانسیلی برای تغییرات کوچک انرژی بصورت زیر نوشته می شود:

$$dW_{elec} = dW_{mech} + dW_{fld} \quad (۲-۳)$$

در شکل (۱-۲) مشخص است که دیفرانسیل انرژی الکتریکی ورودی در زمان dt برابر است با:

$$dW_{ei} = v_t i dt$$

تلفات اهمی در مقاومت r در زمان dt برابر $ri^2 dt$ است بنابراین داریم:

$$dW_{elec} = dW_{ei} - \text{تلفات اهمی} = (v_t \cdot i - r i^2) dt = e i dt \quad (۲-۴)$$

از رابطه (۲-۳) داریم:

$$e i dt = dW_{mech} + dW_{fld} \quad (۲-۵)$$

در حالت کار موتوری با بکار بردن اصول تبدیل انرژی رابطه موازنه انرژی (۲-۵) بدست می آید.

این رابطه به همراه قانون فاراده در القای الکترومغناطیسی پایه های اساسی را برای بررسی دستگاههای مبدل انرژی تشکیل می دهند.

- عکس العمل میدان واسطه: میدان مغناطیسی واسطه ارتباط دهنده سیستمهای الکتریکی

و مکانیکی می باشد به عبارت دیگر میدان مغناطیسی واسطه ارتباطی است بین عنصر ثابت (ساکن) و عنصر متحرک یک سیستم الکترومکانیکی. اگر توان خروجی مکانیکی باشد، میدان واسطه بر روی سیستم الکتریکی طوری واکنش نشان می دهد که انرژی الکتریکی را از این سیستم دریافت می کند. مثلاً در یک موتور این واکنش تولید نیروی ضد محرکه الکتریکی e است. (شکل ۱-۲) که مشابه emf تولید شده در سیم پیچ اولیه یک ترانسفورماتور است.

میدان واسطه انرژی را متناسب با (ei) از سیستم الکتریکی جذب می کند و متناسب با T, ω_r (یا F, v) به سیستم مکانیکی تحویل می دهد.

اگر توان خروجی الکتریکی باشد، میدان واسطه برای جذب انرژی مکانیکی بایستی، با سیستم مکانیکی واکنش نشان دهد. برای مثال در یک ژنراتور انرژی خروجی متناسب با (ei) است. واکنش بین جریان هادی i و میدان مغناطیسی واسطه باید گشتاور واکنشی مخالف با گشتاور مکانیکی اعمال شده به چرخاننده، تولید کند.

در این رهگذر در ژنراتور میدان واسطه انرژی مکانیکی را متناسب با x (سرعت) (گشتاور واکنشی) از سیستم مکانیکی جذب می کند و آنرا بصورت انرژی خروجی الکتریکی متناسب با (ei) به سیستم الکتریکی تحویل می دهد.

بنابراین واکنش میدان مغناطیسی واسطه بر روی سیستم های مکانیکی و الکتریکی برای فرآیند تبدیل انرژی الکترومکانیکی ضروری است. چون نیروی محرکه الکتریکی e القایی و گشتاور T در ارتباط با میدان واسطه هستند، معمولاً به آنها جملات پیوند الکترومکانیکی گفته می شود.

دستگاههای مبدل انرژی الکترومکانیکی بدلیل اینرسی مربوط به عناصر مکانیکی حرکت آرامی دارند. بنابراین میدان واسطه لازم برای تبدیل انرژی باید تغییرات آرامی داشته باشد و چون طبیعت این میدانها شبه ساکن است، لذا انرژی تشعشی الکترومغناطیسی از میدان واسطه تقریباً قابل اغماض است.

۲-۲ سیستم های مغناطیسی تک تحریکه

در این قسمت عبارات انرژی الکتریکی ورودی، انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی، کار مکانیکی انجام شده و بالاخره نیروی مکانیکی را برای سیستم های مغناطیسی تک تحریکه بدست می آوریم.

الف) انرژی الکتریکی ورودی

یک سیستم مغناطیسی ساده چنبره ای شکل را در نظر بگیرید که توسط یک سیم پیچ تحریک شده است. (شکل ۲-۲) رابطه ولتاژ لحظه ای برای مدار الکتریکی بابکار بردن قانون ولتاژ کیرشف نوشته می شود:

$$v_t = ir + e$$

که در این رابطه emf واکنشی است که بصورت افت ولتاژ در جهت جریان i در نظر گرفته می شود. (طبق بخش ۱-۳)

$$e = \frac{d\psi}{dt}$$

$$v_t = ir + \frac{d\psi}{dt} \quad (2-6)$$

در اینجا ψ شار لحظه ای پیوندی با مدار (شار دربرگیرنده) ^(۱) است. طرفین رابطه (۲-۶) را در idt ضرب می کنیم:

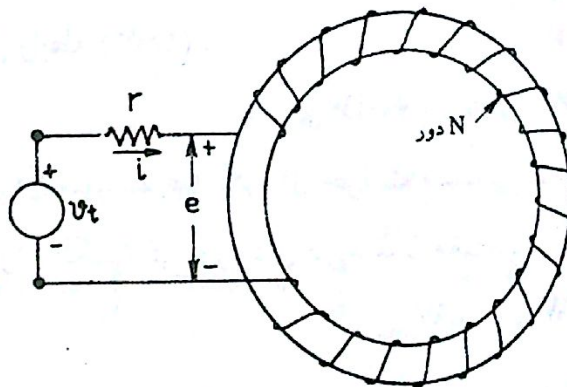
$$v_t idt = ri^2 dt + id\psi$$

$$(v_t - ir) idt = id\psi$$

$$eidt = id\psi$$

با توجه به رابطه (۲-۴):

$$dW_{elec} = eidt = id\psi \quad (2-7)$$



شکل ۲-۲: هسته چنبره ای که از یک منبع تحریک شده است.

اگر هسته مغناطیسی چنبره از مواد فرومغناطیسی ساخته شده باشد بخش عمده ایی از شار

در هسته محدود می شود با فرض اینکه شار ϕ از همه N دور پیچک بگذرد (مثل شکل ۲-۲) شار در برگیرنده (پیوندی) ψ برابر $N\phi$ و بر دور خواهد شد. بنابراین از رابطه (۲-۷) داریم:

$$dW_{elec} = id\psi = Nid\phi = \mathcal{F}.d\phi \quad (2-8)$$

در معادله (۲-۸) مقدار لحظه‌ای شار هسته و $\mathcal{F} = Ni$ ، $m.m.f$ لحظه‌ای سیم پیچ است. روابط (۲-۷) و (۲-۸) نشان می دهند که شار در برگیرنده میدان مغناطیسی باید تغییر کند تا چنبره بتواند از سیستم منبع تغذیه انرژی بگیرد. این تغییر شار در برگیرنده موجب تولید emf واکنشی می شود. همانطوری که قبلاً بیان شد، جاری شدن بارها یا جریان بر خلاف جهت emf واکنشی موجب استخراج انرژی از سیستم الکتریکی می شود.

ب) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

یک رله مغناطیسی ساده را در نظر بگیرید. (شکل (a) ۲-۳) ابتدا آرمیچر (جوشن) در موقعیت باز قرار دارد وقتی کلید S بسته می شود جریان i در N دور سیم پیچ برقرار می شود و شار مغناطیسی بسته به نیروی محرکه مغناطیسی Ni (m.m.f) و مقاومت مغناطیسی مسیر مغناطیسی تشکیل می شود.

بنابراین میدان مغناطیسی ایجاد شده تولید قطبهای شمال و جنوب مغناطیسی می کند. (شکل (a) ۲-۳) و در نتیجه نیروی مغناطیسی بوجود می آید که در صدد است طول فاصله هوایی را کم کند. اگر آرمیچر نتواند حرکت کند کار مکانیکی انجام شده (dW_{mech}) صفر است و بنابراین طبق رابطه (۲-۳):

$$dW_{elec} = 0 + dW_{fld}$$

این نشان می دهد که اگر در سیستم فیزیکی از حرکت قسمتی که توانایی حرکت دارد جلوگیری شود، تمام انرژی الکتریکی ورودی در میدان مغناطیسی ذخیره می شود:

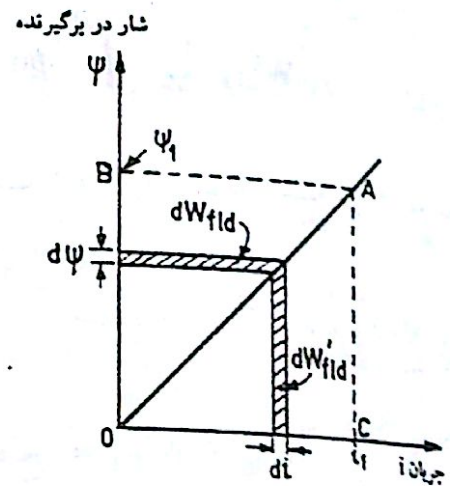
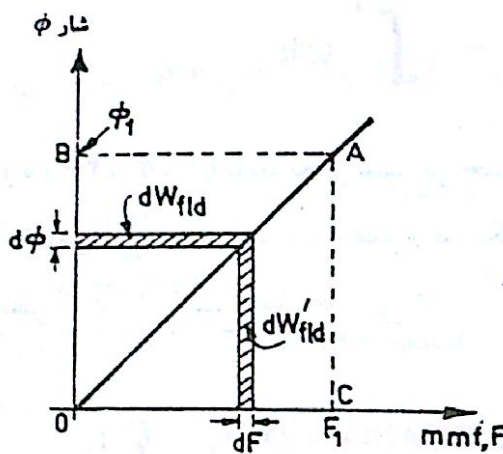
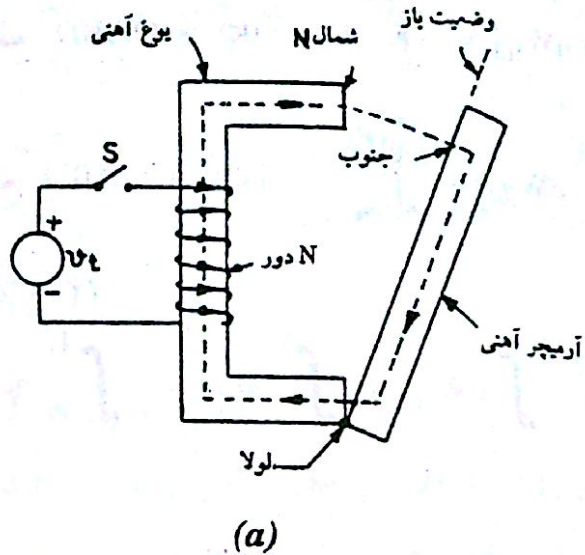
$$dW_{fld} = dW_{elec}$$

از رابطه (۲-۸) داریم،

(۲-۹ الف)

$$dW_{fld} = dW_{elec} = id\psi = \mathcal{F}.d\phi$$

اگر مقدار شار اولیه صفر باشد، انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی W_{fld} با برقراری شار ϕ_1 یا شار در برگیرنده ψ_1 توسط رابطه زیر بدست می آید:



شکل ۲-۳: الف) رله مغناطیسی ساده

ب) و ج) انرژی و شبه انرژی - برای یک مدار مغناطیسی خطی

$$W_{fld} = \int \psi_1 i d\psi = \int \phi_1 \mathcal{F} d\phi \quad (2-9)$$

در رابطه (۲-۹) ب) \mathcal{F} و i باید به ترتیب بر حسب ψ و ϕ بیان شوند.

در شکل (۲-۳a) وقتی آرمیچر در موقعیت باز نگهداشته شود بخش عمده mmf در فاصله هوایی صرف می شود و مثل این است که طبق شکل c و b ۲-۳ اشباع مغناطیسی اتفاق نمی افتد.

برای شکل (۲-۳b) : سطح OABD $W_{fld} = \int_{\psi_1}^{\psi_2} dW_{fld} = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \mathcal{F} \cdot d\phi = OABD$ سطح

(برای شکل c ۲-۳) : سطح OABD $W_{fld} = \int_{\psi_1}^{\psi_2} dW_{fld} = \int_{\psi_1}^{\psi_2} i \cdot d\psi = OABD$ سطح

برای شکل (۲-۳ b) و (۲-۳ c) :
 سطح OACO $\int dW'_{fld} = \int_{\mathcal{F}_1}^{\mathcal{F}_2} \phi d\mathcal{F} = \int_{i_1}^{i_2} \psi di$

سطح OACO شبه انرژی (کو انرژی) W'_{fld} نامیده می شود .

$\therefore W'_{fld} = \int_{\mathcal{F}_1}^{\mathcal{F}_2} \phi d\mathcal{F} = \int_{i_1}^{i_2} \psi di$ (۲-۱۰)

در رابطه (۲-۱۰) ϕ و ψ باید به ترتیب بر حسب \mathcal{F} و i بیان شوند . شبه انرژی در محاسبه نیروهای مغناطیسی مفید است و مفهوم فیزیکی ندارد .

با صرف نظر کردن از اشباع مغناطیسی :
 سطح OACO = سطح OABO

یا : $W_{fld} = W'_{fld}$

و : $W_{fld} = W'_{fld} = \text{سطح OCABO} = \phi_1 \mathcal{F}_1 = \psi_1 i_1$

عموماً برای یک مدار مغناطیسی خطی :

$W_{fld} = W'_{fld} = \frac{1}{2} \psi i = \frac{1}{2} \mathcal{F} \phi$ (۲-۱۱)

انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی و شبه انرژی را می توان بر حسب مقاومت مغناطیسی $***$ و هدایت مغناطیسی $***$ مسیر مغناطیسی بیان کرد ، حال داریم :

m.m.f = (شار) (مقاومت مغناطیسی)

$\mathcal{F} = \phi R_{\mathcal{E}} = \frac{\phi}{\Lambda}$ هدایت مغناطیسی

* Coenergy

** Reluctance

*** Permeance

$$\therefore W_{fld} = W'_{fld} = \frac{1}{2} \phi^2 \mathcal{R} = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{\Lambda}$$

$$\therefore W'_{fld} = W'_{fld} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \Lambda = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{\mathcal{R}}$$

همچنین: ضرب خود القاء L توسط شار مغناطیسی دربرگیرنده بر واحد جریان تعریف می شود:

$$L = \frac{\psi}{i}$$

از رابطه (۲-۱۱) داریم:

$$W_{fld} = W'_{fld} = \frac{1}{2} Li^2$$

بطور خلاصه در یک مدار مغناطیسی خطی، انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی W_{fld} و شبه انرژی W'_{fld} را می توان بصورت های زیر نوشت:

$$W_{fld} = W'_{fld} = \frac{1}{2} \mathcal{F} \phi = \frac{1}{2} \psi i = \frac{1}{2} \phi^2 \mathcal{R} = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{\Lambda} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \Lambda = \frac{1}{2} Li^2 \text{ (زول)} \quad (۲-۱۲)$$

در یک رله مغناطیسی ساده (شکل (a) (۲-۳) مسیر شار مغناطیسی از مسیر یوغ* آرمیچر و فاصله هوایی می گذرد. از آنجا که مقاومت مغناطیسی فاصله هوایی خیلی بزرگتر از مقاومت مغناطیسی آهن است، قسمت عمده mmf ، Ni صرف غلبه بر مقاومت مغناطیسی فاصله هوایی می شود. بنابراین بخش عمده انرژی مغناطیسی W_{fld} در فاصله هوایی ذخیره می شود.

اگر W_{fld1} و W_{fld2} به ترتیب انرژی مغناطیسی ذخیره شده در آهن و فاصله هوایی باشند از شکل (۲-۳) الف) کل انرژی ذخیره شده W_{fld} مجموع این دو مؤلفه است:

$$W_{fld} = W_{fld1} + W_{fld2}$$

چگالی انرژی مغناطیسی ذخیره شده W_{fld1} برای آهن به ترتیب زیر بدست می آید:

$$W_{fld1} = \frac{W_{fld1}}{\text{سطح مقطع موثر عمود بر خطوط شار مغناطیسی (طول مسیر مغناطیسی که از آهن می گذرد)}} \\ = \frac{W_{fld1}}{\text{سطح (طول)}} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}_1 \phi}{\text{سطح (طول)}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{F}_1}{\text{طول}} \right) \left(\frac{\phi}{\text{سطح}} \right) = \frac{1}{2} H_1 B \text{ ژول } J/m^3$$

* Yoke

در اینجا \mathcal{F}_1 ، mmf لازم برای غلبه بر مقاومت مغناطیسی آهن است و H_1 شدت میدان مغناطیسی یا نیروی مغناطیس کنندگی بر حسب آمپر دور بر متر طول مسیر آهن است. B چگالی شار بر حسب Wb/m^2 یا تسلاست.

$$B = \mu_1 H_1$$

$$\therefore w_{fld1} = \frac{1}{2} \mu_1 H_1^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_1} \quad \text{J/m}^3$$

بهمین نحو برای فاصله هوایی، چگالی انرژی مغناطیسی ذخیره شده w_{fld2} از روابط زیر بدست می آید:

$$w_{fld2} = \frac{1}{2} H_2 B = \frac{1}{2} \mu_0 H_2^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{J/m}^3$$

μ_0 و μ_1 به ترتیب ضرایب نفوذپذیری مغناطیسی آهن و فاصله هوایی است.

به طور کلی چگالی انرژی مغناطیسی ذخیره شده از روابط زیر بدست می آید:

$$w_{fld} = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad \text{J/m}^3$$

برای نقطه ای که دارای ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ است، H نشانگر شدت میدان مغناطیسی بر حسب آمپر دور بر متر است.

برای یک مدار مغناطیسی خطی:

$$w'_{fld1} = w_{fld} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} HB \quad \text{J/m}^3 \quad (2-13)$$

w_{fld1} چگالی شبه انرژی است.

بررسی رابطه (۲-۱۲) نشان می دهد که انرژی میدان مغناطیسی می تواند بر حسب متغیرهای میدان نظیر \mathcal{F} و ϕ و ψ و پارامترهای \mathcal{R} و Λ و یا بر حسب پارامتر ضریب القاء M متغیر جریان i بیان شود. این حقیقت که انرژی میدان بر حسب پارامتر مداری L می تواند بیان شود، نشان دهنده روشی است که منجر به تجزیه تحلیل ماشینهای الکتریکی یا تئوری کلی ماشینهای الکتریکی در قالب مدارهای الکتریکی می شود. بنابراین انرژی میدان بصورت پایه فیزیکی برای تئوری جامع ماشینهای الکتریکی مورد استفاده قرار می گیرد.

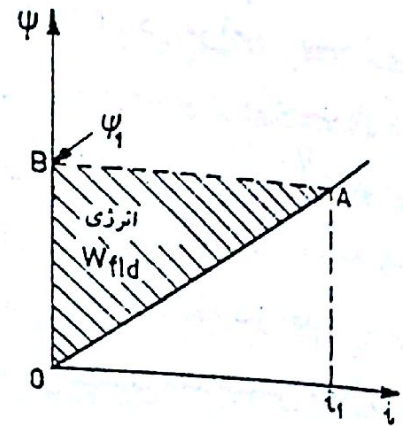
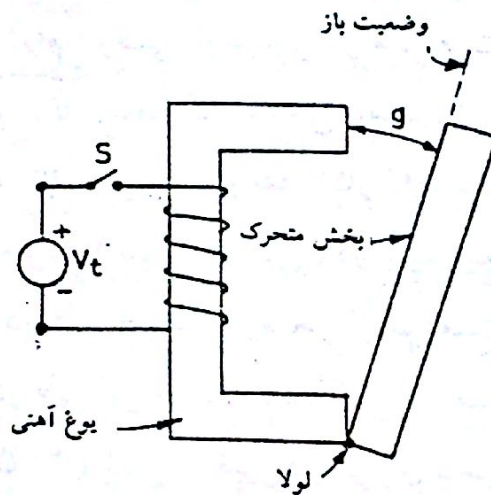
ج) کار مکانیکی انجام شده

رله مغناطیسی ساده شکل (۲-۳ a) را در نظر بگیرید. در شکل (۲-۴ a) فرض شده است که طرف قابل حرکت آرمیچر در موقعیت باز نگهداشته شده است. وقتی کلید S بسته می شود، جریان تحریک از صفر به $i_1 = \frac{Vt}{R}$ می رسد و شار دربرگیرنده از صفر به ψ_1

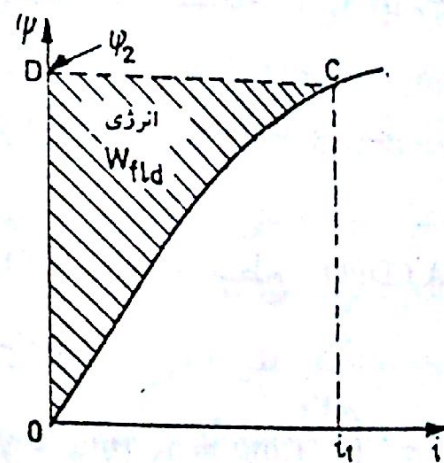
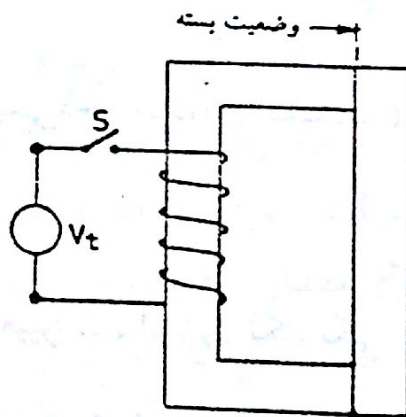
افزایش می یابد. در اینجا r مقاومت سیم پیچ است. همانطور که قبلاً توضیح داده شد انرژی مغناطیسی ذخیره شده در میدان توسط سطح هاشور خورده OABO بدست می آید. در شکل (b) فرض می کنیم طرف قابل حرکت آرمیچر در موقعیت بسته نگهداشته شده باشد. در اینصورت فاصله هوایی صفر است. وقتی کلید S بسته می شود جریان تحریک دوباره از صفر به $i_1 = \frac{V_t}{r}$ می رسد و شار دربرگیرنده از صفر به مقدار ψ_2 افزایش می یابد. در اینجا شار دربرگیرنده ψ_2 باید بزرگتر از ψ_1 باشد زیرا مقاومت مغناطیسی مسیر شارهای مغناطیسی بایستی به ازای همان مقدار آمپر دور مغناطیسی بطور

قابلاً ملاحظه ای کاهش داشته باشد.

همانطور که قبلاً توضیح داده شد، انرژی مغناطیسی ذخیره شده در میدان توسط سطح هاشور خورده OCDO بدست می آید.



(a)



(b)

شکل (۲-۴) (a) آرمیچر در موقعیت باز نگهداشته شده است.

(b) آرمیچر در موقعیت بسته نگهداشته شده است.

برای حالتی که آرمیچر در موقعیت باز است، میدان در مدار مغناطیسی توسط جریان تحریک i_1 تشکیل می شود. این میدان نیروی مغناطیسی ایجاد می کند که باعث می شود طرف آزاد آرمیچر حرکت کند و به موقعیت بسته برسد. در طی حرکت آرمیچر از موقعیت باز آن مقاومت مغناطیسی مسیر مغناطیسی کاهش می یابد و موجب افزایش شار دربرگیرنده از مقدار اولیه ψ_1 می شود. افزایش شار دربرگیرنده emf مخالفی در سیم پیچ القا می کند که موجب برقراری جریان i در مدار تحریک می شود:

$$i = \frac{V_t}{R} \quad \text{(امپدانس سیم پیچ)}$$

(اندازه نیروی ضد محرکه القایی در سیم پیچ به سرعت حرکت آرمیچر بستگی دارد).
 دو حالت حدی حرکت آرمیچر در زیر بررسی می شوند:

۱- حرکت آرام: وقتی آرمیچر در موقعیت باز باشد، جریان تحریک i_1 است، شار دربرگیرنده ψ_1 و نقطه کار A می باشد. (شکل a ۲-۵). در موقعیت بسته آرمیچر شار دربرگیرنده ψ_2 ، جریان i_1 و نقطه کار C است. حرکت آرام آرمیچر از موقعیت باز آن موجب القای emf جزئی (قابل اغماض) در سیم پیچ می شود ($\frac{\psi_2 - \psi_1}{\text{زمان}} = e.m.f$) بنابراین جریان تحریک i_1 در طی حرکت آرمیچر از موقعیت باز و رسیدن آن به موقعیت بسته دقیقاً ثابت می ماند. در طی این حرکت نقطه کار A از مسیر خط قائم AB به نقطه کار جدید C می رسد. (شکل a ۲-۵) اکنون تغییر در انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی W_{fld} را در فاصله زمانی که آرمیچر از وضعیت باز (نقطه A) به وضعیت بسته (نقطه C) می رسد، بررسی می کنیم:

W_{fld} (انرژی مغناطیسی ذخیره شده در وضعیت باز) - (انرژی مغناطیسی ذخیره شده در وضعیت بسته) = W_{fld}

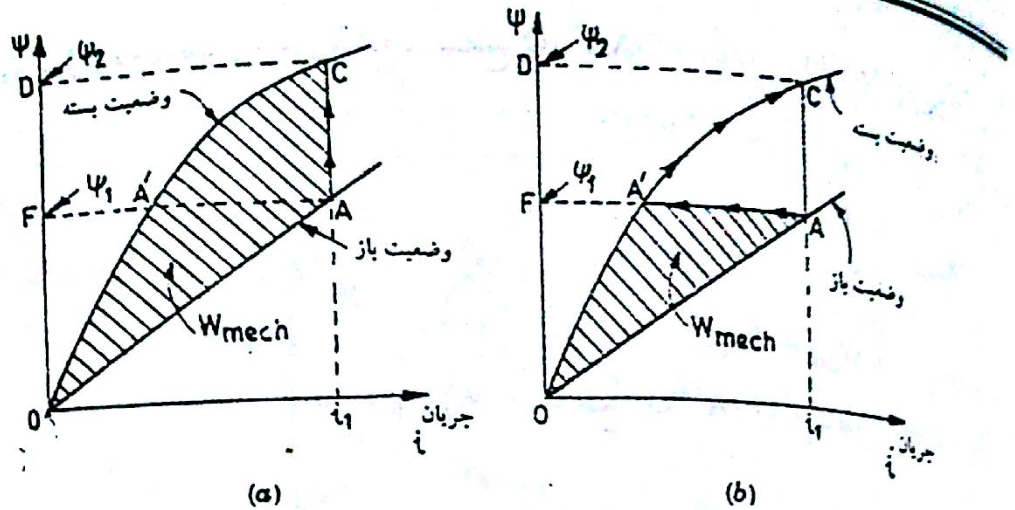
$$W_{fld} = \text{سطح } OAA'FO - \text{سطح } OA'CDFO$$

در طی این تغییرات، انرژی الکتریکی عبارتست از:

$$W_{elec} = \int_{\psi_1}^{\psi_2} i_1 d\psi = i_1 (\psi_2 - \psi_1) = \text{سطح } ACDA'A \quad \text{اما:}$$

$$W_{elec} = W_{fld} + W_{mech}$$

$$\therefore \text{سطح } ACDA'A = \text{سطح } OA'CDFO - \text{سطح } OAA'FO + W_{mech}$$



شکل (۲-۵) (a) کار مکانیکی انجام شده وقتی آرمیچر حرکت آرام دارد. (b) کار مکانیکی انجام شده وقتی آرمیچر حرکت ناگهانی دارد.

$$W_{mech} = \text{سطح } OACA'O = \text{سطح } OA'CDFO - \text{سطح } OACDFO \quad (۲-۱۴)$$

رابطه (۲-۱۴) نشان می دهد که سطح محصور بین دو منحنی مغناطیسی در وضعیت باز و وضعیت بسته و محور قائم برابر کار مکانیکی انجام شده در طول حرکت آرام آرمیچر است. این موضوع توسط سطح هاشور خورده در شکل (۲-۵ a) نشان داده شده است. از مطالب فوق نتیجه می شود که از کل انرژی الکتریکی ورودی در هنگام حرکت جوشن (آرمیچر) مقداری انرژی در میدان مغناطیسی ذخیره می شود و مابقی به صورت انرژی مکانیکی در می آید. از مثال ۱-۲ مشخص می شود که با صرف نظر کردن از اشباع نصف انرژی الکتریکی ورودی در میدان مغناطیسی ذخیره می شود و نصف دیگر به صورت انرژی مکانیکی خروجی در حرکت کند آرمیچر در می آید.

۲- حرکت ناگهانی: در اینجا فرض می شود آرمیچر بطور ناگهانی (خیلی سریع) از موقعیت باز به موقعیت بسته برسد. طبق قضیه ثابت ماندن شار در برگیرنده، شارهای در برگیرنده مدارهای اندوکتیو (القائی) نمی تواند بطور ناگهانی تغییر کنند. در اینجا هم به علت حرکت سریع آرمیچر شار در برگیرنده نمی تواند تغییر کند و روی مقدار ψ_1 ثابت می ماند. پس از بسته شدن آرمیچر نقطه کار بطور افقی از A به سمت A' حرکت می کند. وقتی آرمیچر بسته شده، نقطه کار از A' به سمت C در مسیر بسته منحنی مغناطیسی (۲-۵ b) حرکت می کند. زیرا نقطه کار نهایی باید نقطه C باشد.

در ضمن حرکت ناگهانی آرمیچر از وضعیت باز (نقطه A) به وضعیت بسته (نقطه A') داریم:

۱- تغییر انرژی مغناطیسی ذخیره شده: سطح $OAA'FO$ - سطح $OA'FO$ $W_{fld} =$

$$W_{elec} = \int_{\psi_1}^{\psi_1'} i d\psi = 0$$

۲-

اما:

$$W_{elec} = W_{fld} + W_{mech}$$

اما:

$$\therefore OA'FO \text{ سطح} - OAA'FO \text{ سطح} + W_{mech} = 0$$

و یا

$$W_{mech} = OAA'O \text{ سطح}$$

(۱۵-۲)

این رابطه نشان می دهد که سطح محصور شده بین دو منحنی مغناطیسی مربوط به وضعیتهای باز بسته و مسیر قائم برابر کار مکانیکی که در طی حرکت ناگهانی آرمیچر انجام شده ، می باشد . این موضوع توسط سطح هاشور خورده در شکل (b ۵-۲) نشان داده شده است .

در حرکت سریع دیده می شود که ۱- انرژی الکتریکی ورودی وجود ندارد و ۲- انرژی مکانیکی خروجی برابر است با کاهش در انرژی مغناطیسی ذخیره شده .

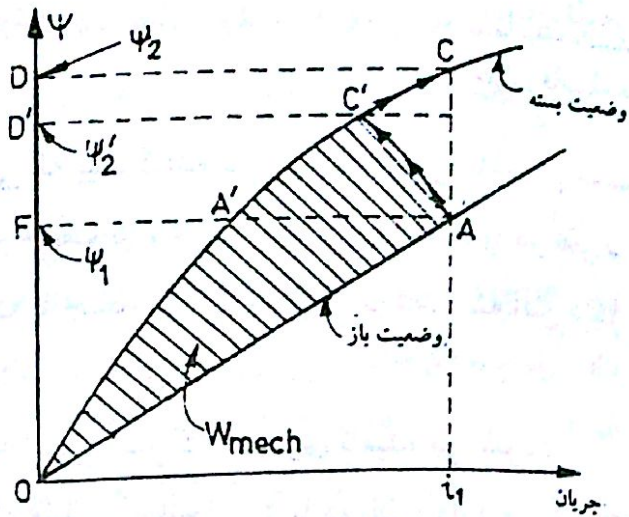
۳- حرکت گذرا: در اینجا حرکت آرمیچر نه خیلی سریع است و نه خیلی کند ، بلکه بین در حدی که در بخشهای (۱) و (۲) بحث شد قرار دارد . مسیر تغییر شار در برگیرنده - جریان هم بین دو مکان نشان داده شده در شکلهای (a,b ۵-۲) قرار دارد .

حرکت اولیه آرمیچر آرام است و به تدریج که به موقعیت بسته نزدیک می شود ، سریع می گردد . پس مکان هندسی $i - \psi$ همانطور که در شکل (۶-۲) نشان داده شده است $AC'C$ خواهد بود .

در طی مدتی که آرمیچر از موقعیت باز به موقعیت بسته می رسد نقطه کار از A به C' می رسد و بعد در طول منحنی مغناطیسی موقعیت بسته یعنی منحنی $OA'C'C$ از C' به C می رسد . بنابراین نقطه کار نهایی C خواهد بود . در نتیجه وقتی آرمیچر بتواند تحت اثر نیروی مغناطیسی حرکت کند ، مکان هندسی $i - \psi$ آن همانطور که در شکل (۶-۲) نشان داده شده است $AC'C$ خواهد بود .

در مدتی که آرمیچر از (نقطه A) وضعیت باز به وضعیت بسته (نقطه C') می رسد ، داریم:

۱- تغییر در انرژی مغناطیسی ذخیره شده :



شکل ۲-۶: مکان هندسی شار در برگیرنده - جریان در اثنای حرکت گذرا

انرژی ذخیره شده در موقعیت باز - انرژی ذخیره شده در موقعیت بسته = W_{fld}

$\therefore W_{fld} = \text{سطح } OAA'FO - \text{سطح } OA'C'D'FO$

$W_{elec} = \int_{\psi_1}^{\psi_2} i d\psi = \text{سطح } AC'D'FA'A$ -۲

انگ: $W_{elec} = W_{fld} + W_{mech}$

$\therefore \text{سطح } A'C'D'FA'A = \text{سطح } OAA'FO + W_{mech} - \text{سطح } OA'C'D'FO$

$W_{mech} = (\text{سطح } OAA'FO + \text{سطح } A'C'D'FA'A) - \text{سطح } OA'C'D'FO = \text{سطح } OAC'A'O$ (۲-۱۶)

این رابطه نشان می دهد که سطح محصور بین دو منحنی مغناطیسی ، در وضعیت باز و بسته و محورهای $i - \psi$ برابر انرژی است که در طی حرکت انتقالی آرمیچر به انرژی مکانیکی تبدیل شده است. (یا کار مکانیکی انجام شده)

(د) محاسبه نیروی مکانیکی

در شکل (a) ۲-۴ نیروی مغناطیسی تمایل به کوتاه کردن فاصله هوایی دارد. و با کاهش فاصله هوایی افزایش می یابد. در نتیجه مقدار متوسط نیروی مغناطیسی $F_{e(av)}$ از رابطه زیر بدست می آید:

(۲-۱۷) $F_{e(av)} = \frac{\text{کار مکانیکی که در طول حرکت آرمیچر انجام می شود}}{\text{مسافتی که در طول حرکت آرمیچر پیموده می شود}}$

$$F_{e(av)} = \frac{\text{سطح } OAC'A'O}{\text{طول فاصله هوایی } g}$$

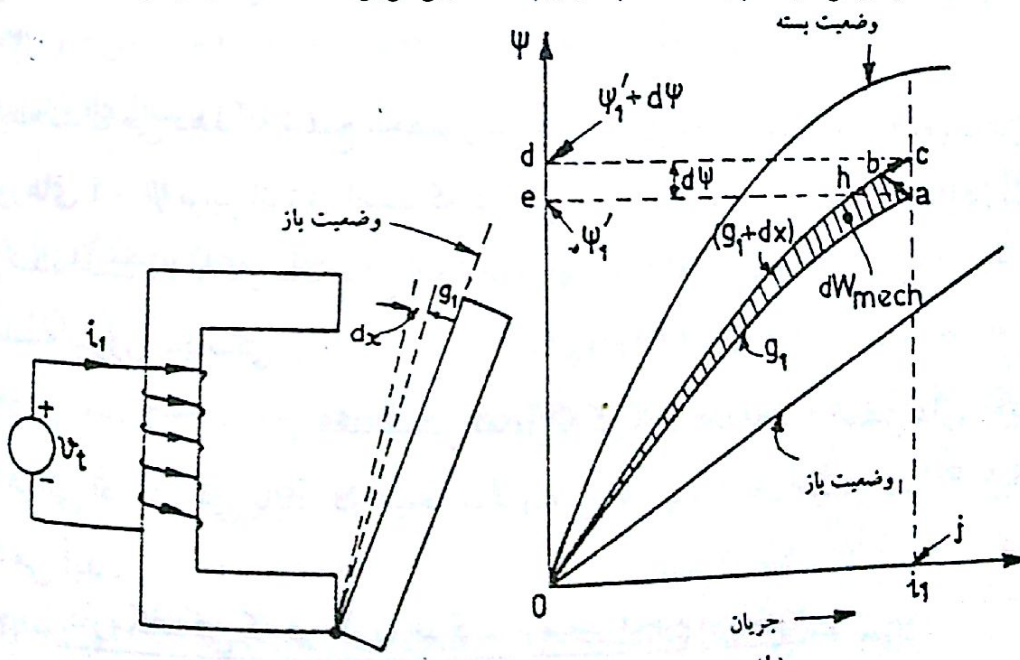
از شکلهای (a) ۲-۴ و (۲-۶):

برای اینکه به رابطه مناسبی که بیان کننده نیروی مغناطیسی باشد بر سیم حرکت جزئی آرمیچر (dx) که بایستی در جهت نیروی مغناطیسی F_e باشد را در نظر می گیریم، البته لزومی ندارد که این حرکت یا جابجائی dx حقیقی باشد. به این دلیل جابجائی dx را جابجائی مجازی و $F_e dx$ را کار مجازی می نامند.

این روش تعیین نیروی مغناطیسی اصل کار مجازی نامیده می شود. بر طبق این اصل قسمتی که قابلیت جابجایی (یا دوران) دارد می تواند در جهت نیروی مغناطیسی F_e (یا گشتاور T_e) جابجایی مجازی dx (یا $d\theta$) داشته باشد. سپس اثر آن بر روی معادله موازنه انرژی (۲-۳)، به منظور محاسبه نیروی مغناطیسی F_e یا گشتاور مغناطیسی T_e بررسی می شود.

در شکل (a) ۲-۷ فرض می شود که آرمیچر در فاصله g_1 از وضعیت باز قرار دارد. سپس در جهت نیروی مغناطیسی F_e جابجایی مجازی dx در نظر گرفته می شود. در شکل (b) ۲-۷ دو منحنی مغناطیسی که مربوط به وضعیتهای (g_1) و ($g_1 + dx$) آرمیچر هستند نشان داده شده اند.

در طی جابجایی جزئی dx مکان هندسی شار دربرگیرنده - جریان (abc) می باشد. در اینجا نقطه کار در موقعیت g_1 است. ψ'_1 و i_1 مقادیر مربوطه هستند در موقعیت ($g_1 + dx$)



شکل ۲-۷: کار مکانیکی که برای جابجایی جزئی آرمیچر انجام شده است.

نقطه کار c است و مقادیر مربوطه $(\psi'_1 + d\psi)$ و i_1 هستند. همانطور که قبلاً توضیح داده شد کار مکانیکی که در جابجایی مجازی dx انجام شده است سطح oabho می باشد و:

$$\text{سطح oabho} = F_e dx \quad (2-18)$$

سطح oabho و سطح oaho در سطح مثلث abh اختلاف دارند. چون تغییر مکان dx بی نهایت کوچک است وقتی که به سمت صفر میل کند آنگاه مساحت مثلث abh قابل اغماض است. از طرف دیگر تغییر مکان آرمیچر در طول تغییر مکان مجازی dx بایستی ناگهانی به حساب آید. توجه کنید که در موقعیت $(g_1 + dx)$ (همانطور که در قسمت (c) ۲-۲ توضیح داده شد) نقطه کار نهایی باید c باشد. اکنون:

$$dW_{elec} = \int_{\psi'_1}^{\psi'_a} i d\psi = 0 \quad \text{و} \quad dW_{mech} = F_e dx$$

با جایگذاری مقادیر در رابطه (۲-۳) خواهیم داشت:

$$0 = F_e dx + dW_{fld} \quad \text{در } \psi \text{ ثابت:}$$

و یا

$$F_e dx = - dW_{fld} \quad \text{در } \psi \text{ ثابت:} \quad (2-19)$$

همانطور که نشان داده شد در طی جابجایی مجازی dx وقتی ψ ثابت است انرژی الکتریکی جاری شده صفر است. کار مکانیکی انجام شده $F_e dx$ با صرف انرژی ذخیره شده بوده و توسط علامت منفی قبل از dW_{fld} در رابطه (۲-۱۹) نشان داده می شود.

از رابطه (۲-۱۹) داریم:

$$F_e = - \left(\frac{dW_{fld}}{dx} \right) \quad \text{با } \psi \text{ ثابت:}$$

$$F_e = - \left(\frac{dW_{fld}}{dx} \right) \quad \text{یا}$$

$$F_e = - \left(\frac{dW_{fld}}{dx} \right) \quad \text{ثابت } \psi$$

همچنین: ثابت ψ } (2-20)

توجه کنید که W_{fld} باید بر حسب ψ و x و یا ϕ و x بیان شود. از این جهت رابطه (۲-۲۰) به روابط پارامتریک برای نیروی مغناطیسی بقرار زیر منجر می شود:

$$F_e = - \frac{\partial W_{fld}(\psi, x)}{\partial x} = - \frac{\partial W_{fld}(\phi, x)}{\partial x} \quad (2-21)$$

در عبارت فوق برای نیروی مکانیکی ناشی از میدان ψ یا ϕ متغیرهای مستقل اند. چون ولتاژ مساوی مشتق ψ است این عبارت F_e را برای یک سیستم با کنترل ولتاژ بدست می دهد.

بطور مشابه سطح $oabho$ با سطح $oacbho$ در سطح مثلث abc اختلاف دارند. در اینجا هم وقتی dx به صفر می رسد سطح $oahbo$ با سطح $oacbho$ مساوی می شوند. از طرف دیگر تغییر مکان آر میچر در طول جابجایی مجازی dx ممکن است آهسته فرض شود. بطوریکه نقطه کار از a به سمت c بطور عمودی حرکت می کند.

$$dW_{elec} = \int_{\psi'_1}^{\psi'_1 + d\psi} i_1 d\psi = i_1 d\psi = acdea \text{ سطح} \quad \text{در اینجا:}$$

برای بدست آوردن dW_{fld} شکل (b) ۷-۲ نشان می دهد که:
 سطح $ojaeo$ - سطح $ojcdo$ = سطح $acdea$

$$= [\text{در موقعیت } g_1 + dx \text{ (شبه انرژی + انرژی مغناطیسی ذخیره شده)}] - [\text{در موقعیت } g_1 \text{ (شبه انرژی + انرژی مغناطیسی ذخیره شده)}]$$

به عبارت دیگر در طی جابجایی مجازی dx ، سطح $acdea$ میزان افزایش انرژی میدان dW_{fld} و شبه انرژی dW'_{fld} را نشان می دهد. این سطح برابر تفاضل سطح مستطیل $ojaeo$ از سطح مستطیل $ojcdo$ است.

$$ocdea \text{ سطح} = dW_{fld} + dW'_{fld} \quad \text{از اینجهت}$$

$$ocdea \text{ سطح} = dW_{elec} + i_1 d\psi \quad \text{اما قبلاً دیدیم:}$$

$$\therefore dW'_{fld} + dW'_{fld} = i_1 d\psi = acdea \text{ سطح}$$

بنابراین جزء تغییر انرژی میدان dW_{fld} از رابطه زیر بدست می آید.

$$dW_{fld} = i_1 d\psi - dW'_{fld}$$

$$dW_{mech} = F_e dx \quad \text{همچنین:}$$

با جایگذاری مقادیر: $dW_{elec} = i_1 d\psi$ و $dW_{fld} = i_1 d\psi - dW'_{fld}$ و $dW_{mech} = F_e dx$ در رابطه (۲-۳) خواهیم داشت:

$$i_1 d\psi = F_e dx + i_1 d\psi - dW'_{fld} \quad \text{یا:}$$

$$F_e dx = dW'_{fld} \quad \text{ثابت } i \quad (۲-۲۲)$$

علامت مثبت قبل از dW'_{fld} نشانگر آن است که کار مکانیکی انجام شده در طی جابجایی

مجازی dx یعنی $F_c dx$ وقتی جریان ثابت است برابر میزان افزایش در شبه انرژی است.

$$\therefore F_c = + \left. \frac{dW'_{fld}}{dx} \right|_{i = cte}$$

در جریان ثابت

چونکه W'_{fld} بایستی بر حسب (i, x) و یا (\mathcal{F}, x) بیان شود. در اینصورت رابطه پارامتریک برای نیروی مغناطیسی عبارتست از:

$$F_c = \frac{\partial W'_{fld}(i, x)}{\partial x} = \frac{\partial W'_{fld}(\mathcal{F}, x)}{\partial x} \quad (2-23)$$

چون آرمیچر خطی است روابط (۲-۲۱) و (۲-۲۳) مقدار نیروی الکترومغناطیسی را بدست می دهد. اگر آرمیچر حرکت دورانی داشته باشد گشتاور الکترومغناطیسی T_c از رابطه پارامتریک (۲-۲۱) بصورت زیر بدست می آید:

$$T_c = \frac{\partial W_{fld}(\psi, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial W_{fld}(\phi, \theta)}{\partial \theta} \quad (2-24)$$

و از رابطه پارامتریک (۲-۲۳) بصورت زیر:

$$T_c = \frac{\partial W'_{fld}(i, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial W'_{fld}(\mathcal{F}, \theta)}{\partial \theta} \quad (2-25)$$

این موضوع بیان می کند که اگر قسمتی از هر دستگاه فیزیکی که قابلیت حرکت (یا دوران) دارد جابجایی جزئی داشته باشد و سایر قسمتها بدون حرکت باقی بمانند، این جابجایی جزئی در منحنی مغناطیسی تأثیر می گذارد و دستگاه فیزیکی می تواند نیرو یا گشتاور الکترومغناطیسی ایجاد کند.

البته باید در نظر داشت که روابط (۲-۲۱) تا (۲-۲۵) حتی وقتی که مسیر مغناطیسی اشباع است نیز صادقند. اگر از اشباع صرف نظر شود مثلاً "وقتی که منحنی ψ و i و یا ϕ و \mathcal{F} خطی در نظر گرفته شود آنگاه:

$$W_{fld} = W'_{fld}$$

با توجه به رابطه (۲-۲۳):

$$F_c = \frac{\partial W'_{fld}(i, x)}{\partial x} = \frac{\partial W_{fld}(i, x)}{\partial x}$$

$$F_e = \frac{\partial W'_{fld}(F, x)}{\partial x} = \frac{\partial W_{fld}(F, x)}{\partial x} \quad (2-26)$$

و نیز $W_{fld} = \frac{1}{2} \phi^2 \mathcal{R}$ بنا بر این از رابطه (۲-۲۱):

$$F_e = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} \quad (2-27)$$

همچنین:

$$W_{fld} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \Lambda = \frac{1}{2} i^2 L$$

و از رابطه (۲-۲۶):

$$F_e = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d\Lambda}{dx} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \quad (2-28)$$

انرژی مغناطیسی ذخیره شده بصورت $W_{fld} = \frac{1}{2} i\psi$ نیز بیان می شود. اگر جریان i بر حسب ψ و x بیان شود آنگاه از رابطه (۲-۲۱) بدست می آوریم:

$$F_e = -\frac{1}{2} \psi \frac{\partial i}{\partial x}(\psi, x) \quad (2-29)$$

و اگر ψ بر حسب i و x بیان شود از رابطه (۲-۲۶):

$$F_e = \frac{1}{2} i \frac{\partial \psi}{\partial x}(i, x) \quad (2-30)$$

بصورت مشابهی برای گشتاور الکترومغناطیسی T_e داریم:

$$T_e = \frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{d\theta} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d\Lambda}{d\theta}$$

$$= \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} = -\frac{1}{2} \psi \frac{\partial i}{\partial \theta}(\psi, \theta) = \frac{1}{2} i \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(i, \theta) \quad (2-31)$$

از بررسی معادلات (۲-۲۱) تا (۲-۳۱)، می توان نتیجه گرفت که نیرو یا گشتاور مغناطیسی در هر دستگاه فیزیکی در جهتی تولید می شود که تمایل دارد:

۱) انرژی مغناطیسی ذخیره شده در ψ یا ϕ ثابت را کاهش دهد روابط (۲-۲۱) تا (۲-۲۴) را ببینید.

۲) انرژی ذخیره شده در میدان و شبه انرژی در جریان i و یا mmf ثابت را افزایش دهد. رابطه (۲-۲۶)

۳) مقاومت مغناطیسی را کاهش دهد. (معادلات ۲-۲۷ و ۲-۳۱)

۴) هدایت مغناطیسی و ضریب القاء (اندوکتانس) را افزایش دهد. (۲-۲۸) تا (۲-۳۱)

(۵) جریان i را در شار دربرگیرنده ثابت کاهش دهد رابطه (۲-۲۹) - ویا ψ را در جریان ثابت (i) افزایش دهد رابطه (۲-۳۰).

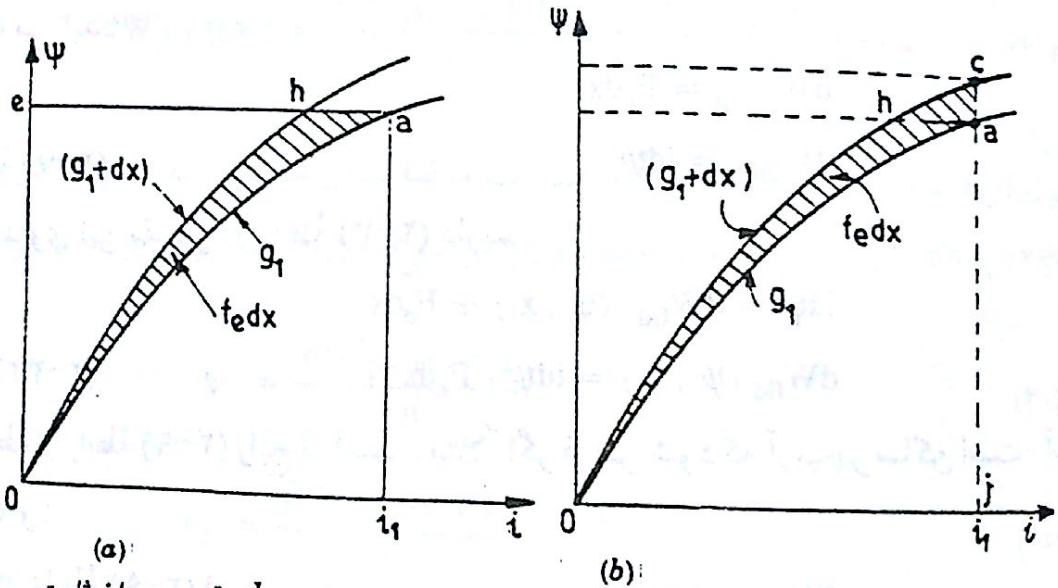
عباراتی را که برای F_e و T_e قبلاً بدست آوردیم می توان بصورت مشابهی در مورد میدانهایی که توسط آهنربای دائم ایجاد شده اند بکار برد زیرا F_e و T_e به منشأ میدان بستگی ندارند.

نتیجه ای که از رابطه (۲-۱۹) بدست می آید می توان با مراجعه به شکل (b) ۲-۷ نیز بدست آورد. برای جابجایی مجازی dx در جهت F_e از موقعیت g_1 به موقعیت $(g_1 + dx)$ و در حالتی که ψ ثابت است انرژی ذخیره شده در میدان همانطور که در شکل (a) ۲-۸ نشان داده شده است، از سطح $oaheo$ به سطح $oahoe$ کاهش می یابد.

میزان کاهش انرژی ذخیره شده در میدان پس از جابجایی $dx = \text{سطح } oaheo = F_e dx$ در جهت F_e و در ψ ثابت.

$$F_e dx = -dW_{fld}$$

یا: با ψ ثابت:



شکل ۲-۸ (الف): در جابجایی dx وقتی

(ب) در جابجایی dx وقتی

شار دربرگیرنده ثابت باشد انرژی کاهش می یابد. باشد شبه انرژی افزایش می یابد.

علامت منفی قبل از dW_{fld} نشانگر کاهش انرژی ذخیره شده در میدان است. برای بدست آوردن رابطه (۲-۲۲) مجدداً به شکل (b) ۲-۷ مراجعه می کنیم: با جابجایی dx از موقعیت g_1 به موقعیت $(g_1 + dx)$ در جهت F_e ویا ثابت بودن جریان، شبه انرژی از سطح $oajao$ به سطح $ojcho$ افزایش می یابد، این مطلب در شکل (b) ۲-۸ نشان داده شده است.

میزان افزایش شبه انرژی بعد از جابجایی حقیقی dx در جهت F_e

$$F_e dx = \text{oacho سطح} =$$

وقتی جریان ثابت است

$$F_e dx = dW'_{fld}$$

و یا:

(۲-۲۲) در جریان ثابت

علامت مثبت قبل از dW'_{fld} نشان دهنده افزایش شبه انرژی است وقتی جریان ثابت باشد. ذیلاً روش دیگری را برای بدست آوردن رابطه ای برای نیروی مغناطیسی F_e بر حسب انرژی و شبه انرژی میدان ارائه می دهیم.

رابطه (۲-۹) نشان می دهد که انرژی میدان W_{fld} تابعی از شار دربرگیرنده ψ و یا شار ϕ است. در شکل (۲-۳) الف) انرژی میدان W_{fld} اصولاً در فاصله هوایی ذخیره می شود. اگر فاصله هوایی تغییر کند x اندازه گیری شده از موقعیت باز نیز تغییر می کند و در نتیجه انرژی ذخیره شده در میدان تغییر می کند. بنابراین می توان گفت W_{fld} تابعی از دو متغیر مستقل یعنی ψ و x (و یا ϕ و x) است.

کار مکانیکی که در طی حرکت جزئی dx در جهت نیروی F_e انجام شده است از رابطه زیر بدست می آید:

$$dW_{mech} = F_e dx$$

$$dW_{elec} = id\psi$$

از رابطه (۲-۷)

باجایگذاری این مقادیر در رابطه (۲-۳) داریم:

$$id\psi = dW_{fld}(\psi, x) + F_e dx$$

$$dW_{fld}(\psi, x) = id\psi - F_e dx$$

و یا: (۲-۳۲)

این رابطه از رابطه (۲-۹) رایج تر است. مثلاً اگر فرض شود که آرمیچر ساکن است، آنگاه $dx = 0$ و:

$$dW_{fld} = id\psi$$

که همان رابطه (۲-۹) است.

چون W_{fld} به ψ و x وابسته است، می تواند به شکل دیفرانسیلی بر حسب مشتقات جزئی مولفه هایش بیان شود:

$$dW_{fld}(\psi, x) = \frac{\partial W_{fld}(\psi, x)}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial W_{fld}(\psi, x)}{\partial x} dx \quad (۲-۳۳)$$

و چون ψ و x متغیرهای مستقل هستند ضرایب مولفه های مربوط به $d\psi$ و dx در دو رابطه (۲-۳۲) و (۲-۳۳) باید برابر باشند:

(۲-۳۴)

$$i = \frac{\partial W_{fld}(\psi, x)}{\partial \psi}$$

∴

$$F_e = - \frac{\partial W_{fld}(\psi, x)}{\partial x}$$

(۲-۳۵)

رابطه (۲-۳۵) همان رابطه (۲-۲۱) است. از شکل (b) ۲-۳ واضح است که شبه انرژی W'_{fld} به i و x وابسته است، این موضوع توسط روابط زیر بیان می شود:

$$W'_{fld}(i, x) = i d\psi - W_{fld}(\psi, x)$$

$$dW'_{fld}(i, x) = i d\psi + \psi di - dW_{fld}(\psi, x)$$

(۲-۳۶)

با جایگذاری رابطه (۲-۳۲) در روابط بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} dW'_{fld}(i, x) &= i d\psi + \psi di - i d\psi + F_e dx \\ &= \psi di + F_e dx \end{aligned}$$

(۲-۳۷)

چون W'_{fld} به i و x وابسته است می تواند به شکل دیفرانسیلی بر حسب مشتقات جزئی مولفه هایش بیان شود:

$$dW'_{fld}(i, x) = \frac{\partial W'_{fld}(i, x)}{\partial i} di + \frac{\partial W'_{fld}(i, x)}{\partial x} dx$$

(۲-۳۸)

و چون i و x متغیرهای مستقل هستند ضرایب مولفه های مربوط به di و dx در روابط (۲-۳۷) و (۲-۳۸) بایستی مساوی باشند و این موضوع به رابطه پارامتری زیر منجر می شود:

$$\psi = \frac{\partial W'_{fld}(i, x)}{\partial i}$$

(۲-۳۹)

و:

$$F_e = \frac{\partial W'_{fld}(i, x)}{\partial x}$$

(۲-۴۰)

رابطه (۲-۴۰) همان رابطه (۲-۲۳) است.

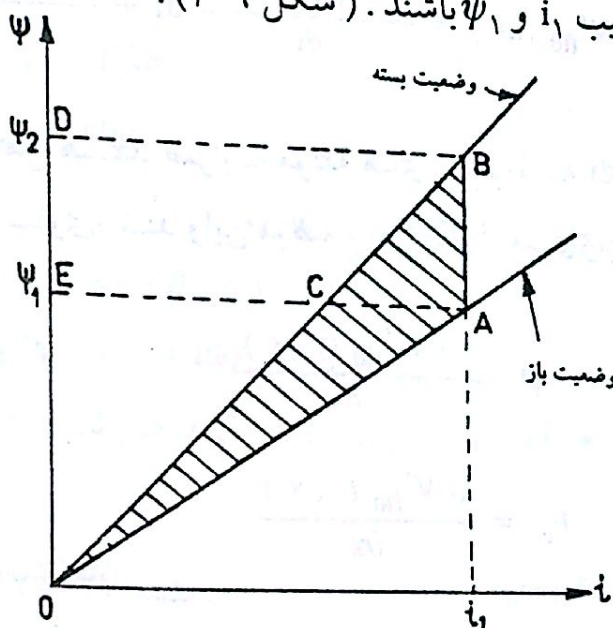
با در نظر گرفتن یک رله ساده مغناطیسی، روابطی را برای کار مکانیکی انجام شده، نیروی مغناطیسی F_e و نظایر آن بدست آوریم. البته خواننده نباید نتیجه بگیرد که همه این روابط فقط برای رله مغناطیسی ساده کاربرد دارد. بلکه برای همه سیستمهای فیزیکی که میدان مغناطیسی واسطه دارند و این میدان شبیه حلقه ارتباط دهنده بین قسمتهای ساکن و متحرک عمل می کند کاربرد دارد.

اگر لازم باشد که F_e یا T_e برای یک سیستم فیزیکی محاسبه گردد، آنگاه تصور می شود

که قسمت متحرک آن در راستای F_e و T_e تغییر مکان dx یا $d\theta$ مجازی دارد، سپس با استفاده از روابط (۲-۲۱) و (۲-۲۳) یا رابطه (۲-۳۱) نتایج مورد نظر بدست می آید. وقتی رابطه (۲-۲۱) و (۲-۲۳) و (۲-۲۴) و (۲-۲۵) مورد استفاده قرار می گیرند، ابتدا بایستی علامت جبری را در نظر داشت و سپس متغیرهای توابع انرژی و شبه انرژی W_{fld} و W'_{fld} که این توابع بر حسب آنها بیان شده اند را تعیین کنیم. انتخاب بین W_{fld} و W'_{fld} بسته به تعریف اولیه است که از سیستم مغناطیسی مورد نظر می شود.

مثال ۲.۱

برای یک رله معین، منحنی های مغناطیسی برای موقعیتهای باز و بسته آرمیچر خطی هستند. اگر آرمیچر این رله در حالی که جریان ثابت است (مثلاً "حرکت خیلی آرام باشد) از وضعیت باز حرکت کند و به وضعیت بسته برسد، ثابت کنید که انرژی الکتریکی ورودی بطور مساوی بین انرژی ذخیره شده در میدان و کار مکانیکی انجام شده تقسیم می گردد. حل: با فرض موقعیت باز برای رله، فرض کنید که نقطه کار A باشد بطوری که جریان و شار دربرگیرنده به ترتیب i_1 و ψ_1 باشند. (شکل ۲-۹).



شکل (۲-۹): مربوط به مثال ۲-۱

در موقعیت بسته، نقطه کار B است بطوری که جریان i_1 و شار دربرگیرنده ψ_2 است. چون تغییر مکان آرمیچر از وضعیت باز به وضعیت بسته تحت جریان ثابت صورت می گیرد بنابراین مسیر روی منحنی $\psi-i$ خط عمودی AB خواهد بود. انرژی الکتریکی ورودی در ضمن حرکت آرمیچر از موقعیت باز به موقعیت بسته برابر است با:

$$W_{elec} = \int_{\psi_1}^{\psi_2} i_1 d\psi = i_1 (\psi_2 - \psi_1)$$

کار مکانیکی انجام شده W_{mech} توسط سطح هاشور خورده OABCO داده می شود:

$$\therefore W_{mech} = \text{OABCO سطح مثلث} = \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1) i_1$$

انرژی مغناطیسی ذخیره شده:

$$W_{fld} = \text{OACEO سطح مثلث} - \text{OCBDEO سطح مثلث}$$

$$\frac{1}{2} \psi_2 i_1 - \frac{1}{2} \psi_1 i_1 = \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1) i_1$$

از روابط بالا دیده می شود که:

$$W_{fld} = W_{mech} = \frac{1}{2} W_{elec}$$

این رابطه مؤید نتیجه بدست آمده است.

مثال ۲.۲

در رله مغناطیسی ساده شکل (a) ۲-۳ تغییر شار دربرگیرنده ψ بر حسب جریان i و جابجایی x از وضعیت باز توسط رابطه $\psi = ix^{\frac{1}{2}}$ داده شده است. رابطه ای برای نیروی مغناطیسی پیدا کنید.

حل: نیروی الکترومغناطیسی F_e با مشتق جزئی گرفتن از تابع انرژی میدان W_{fld} و یا تابع کوانرژی W'_{fld} بدست می آید:

با در نظر گرفتن انرژی ذخیره شده، نیروی مغناطیسی چنین خواهد شد:

$$F_e = - \frac{\partial W_{fld}(\psi, x)}{\partial x} \quad (2-21)$$

$$W_{fld}(\psi, x) = \int_0^{\psi} i d\psi = \int_0^{\psi} \frac{\psi}{x^{1/2}} d\psi = \frac{1}{x^{1/2}} \frac{\psi^2}{2} \quad \text{از رابطه (2-9):}$$

$$\therefore F_e = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x^{1/2}} \cdot \frac{\psi^2}{2} \right] = - \frac{\psi^2}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-3/2} = \frac{\psi^2}{4} \frac{1}{x^{3/2}} \quad (2-41)$$

با در نظر گرفتن شبه انرژی:

$$F_e = - \frac{\partial W'_{fld}(i, x)}{\partial x} \quad (2-23)$$

اما از رابطه (۲-۱۰) داریم:

$$W'_{fd}(i, x) = \int_0^i \psi di = \int_0^i ix^{\frac{1}{2}} di = x^{\frac{1}{2}} \frac{i^2}{2}$$

اما از رابطه (۲-۱۰) داریم:

$$\therefore F_e = \frac{\partial}{\partial x} \left[x^{\frac{1}{2}} \frac{i^2}{2} \right] = \frac{i^2}{2} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{i^2}{4} \frac{1}{x^{1/2}} \quad (۲-۴۱ \text{ الف})$$

همچنین از رابطه (۲-۳۰)

$$F_e = \frac{1}{2} i \frac{\partial \psi(i, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} i \frac{\partial}{\partial x} (ix^{\frac{1}{2}}) = \frac{i^2}{4} \frac{1}{x^{1/2}}$$

یا $\psi' = ix^{\frac{1}{2}}$ یا $i = \frac{\psi}{x^{1/2}}$ (۲-۴۱ ب)

با جایگذاری این مقدار i در رابطه (۲-۴۱ الف) داریم:

$$F_e = \frac{\psi^2}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{\psi^2}{4} \frac{1}{x^{3/2}} \quad (۲-۴۱ ج)$$

بنابراین مقدار F_e اگر از طریق انرژی میدان محاسبه شود و یا از روی تابع شبه انرژی، یکسان است.

مثال ۲.۳

از رله مغناطیسی ساده شکل (a) ۲-۳ مشخصه $i - \psi$ زیر داده شده است.

- ۱- در موقعیت باز برای تمام مقادیر جریان i : ویر دور $i = 0.04$ $\psi = 0.04$
- ۲- در موقعیت بسته:

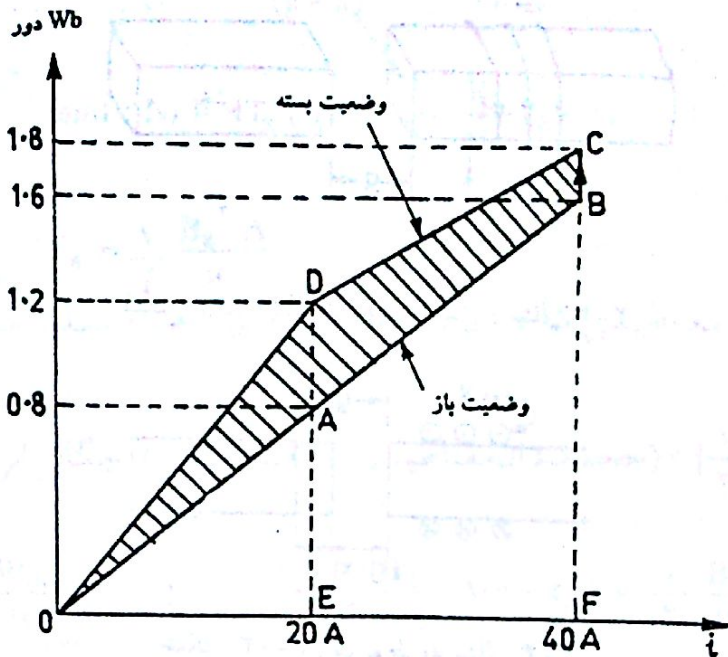
$$\begin{cases} \psi = 0.06 i & 0 \leq i \leq 20 \\ \psi = 1/2 + 0.03(i - 20) & i > 20 \end{cases}$$

اگر آرمیچر از وضعیت باز به وضعیت بسته برسد مقدار متوسط نیروی مغناطیسی را پیدا کنید.

طول فاصله هوایی 2 cm است و فرض می شود که در طی حرکت آرمیچر جریان در 40^A ثابت می ماند.

حل: در هر دو وضعیت باز و بسته آرمیچر منحنی تغییرات شار در برگیرنده بر حسب جریان در شکل (۲-۱۰) نشان داده شده است. B نقطه کار در موقعیت باز و C نقطه کار در موقعیت بسته است. در ضمن حرکت آرمیچر چون جریان در مقدار 40^A ثابت باقی می

مانند، مسیر حرکت روی منحنی در طول خط عمودی BC می باشد.



شکل ۱۰-۲: مشخصه های (i-ψ) مثال ۳-۲

سطح OABFEO - سطح ODCFEO = سطح OABCDO = کار مکانیکی انجام شده در ضمن حرکت آرمیچر

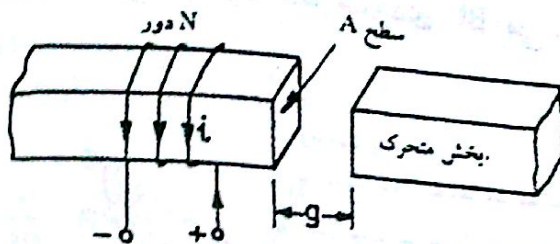
$$= \left[\frac{1}{2} (20)(1/2) + \frac{1}{2} (1/2 + 1/8) (20) \right] - \left[\frac{1}{2} (40)(1/6) \right] = 42 - 32 = 10 \text{ ژول}$$
 متوسط نیروی الکترومغناطیسی: $F_{e(av)} = \frac{10}{2 \times 10^{-2}} = 500 \text{ نیوتن}$

مثال ۲.۴

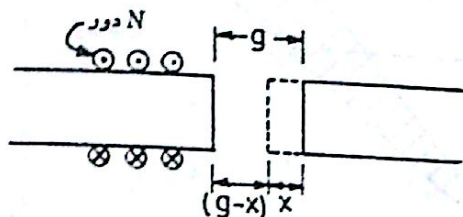
برای الکترومغناطیس نشان داده شده در شکل (۱۱-۲) رابطه ای برای نیروی مغناطیسی F_e بدست آورید. فرض کنید که مقاومت مغناطیسی فقط توسط فاصله هوایی تعیین می شود و از پراکندگی مغناطیسی و شکستگی شار مغناطیسی صرف نظر کنید.
 حل:

فرض کنید که قسمت متحرک مسافت x را در جهت نیروی مغناطیسی F_e^* بپیماید -
 شکل (۱۲-۲) - بعد از این جابجایی x، طول فاصله هوایی به (g-x) کاهش می یابد.

* در این قبیل مسائل برای محاسبه نیروی مغناطیسی F_e ، بهتر است در نظر بگیریم که قسمت متحرک مسافت x را در جهت F_e پیموده است. سپس رابطه ای بر حسب x برای هر یک از پارامترهای W_{fld} ، W_{fld} ، مقاومت مغناطیسی، هدایت مغناطیسی و ضریب القاء بدست آوریم. با یکاربردن یکی از این روابط به همراه یک رابطه مناسب از روابط (۲-۳۰) تا (۲-۴۰) می توانیم F_e را بدست آوریم.



شکل ۱۱-۲: الکترومغناطیس، مثال ۲-۴



شکل ۱۲-۲: مربوط به مثال ۲-۴

برای توجه بیشتر سه روش مختلف برای حل این مثال ارائه می شود:

۱- برای فاصله هوایی $(g-x)$ مقاومت مغناطیسی توسط رابطه زیر داده می شود:

$$\mathcal{R}_g = \frac{g-x}{\mu_0 A}$$

$$F_c = -\frac{1}{2} \phi_g^2 \frac{d\mathcal{R}_g}{dx} = -\frac{1}{2} \phi_g^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{g-x}{\mu_0 A} \right) = \frac{1}{2} \phi_g^2 \frac{1}{\mu_0 A}$$

چگالی شار در فاصله هوایی:

$$B_g = \frac{\phi_g \text{ شار فاصله هوایی}}{A \text{ سطح}}$$

$$\therefore F_c = \frac{1}{2} \frac{B_g^2 \cdot A^2}{\mu_0 A} = \frac{1}{2} \frac{B_g^2 A}{\mu_0}$$

۲- هدایت مغناطیسی فاصله هوایی:

$$\Lambda_g = \frac{\mu_0 A}{g-x}$$

$$\therefore F_g = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d\Lambda_g}{dx} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu_0 A}{g-x} \right)$$

یا

$$F_c = \frac{1}{2} N^2 i^2 \frac{\mu_0 A}{(g-x)^2}$$

$$\text{mmf} : Ni = H_g (g-x) = \frac{B_g}{\mu_0} (g-x)$$

$$\therefore F_e = \frac{1}{2} \frac{B_g^2 A}{\mu_0}$$

۳- انرژی میدان مغناطیسی که در فاصله هوایی (g-x) ذخیره شده است از روابط زیر حاصل می شود:

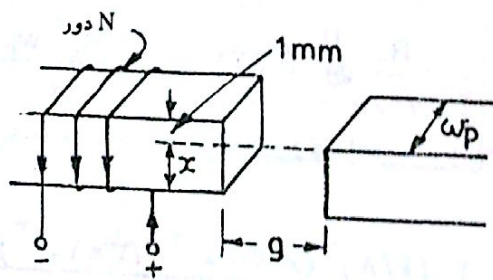
$$W_{fld} = (\text{حجم میدان مغناطیسی در فاصله هوایی}) (\text{چگالی انرژی میدان}) = \left[\frac{1}{2} \frac{B_g^2}{\mu_0} \right] [A(g-x)]$$

$$\therefore F_e = - \frac{\partial W_{fld}}{\partial x} (\phi, x) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \frac{B_g^2}{\mu_0} A(g-x) \right] = \frac{1}{2} \frac{B_g^2 A}{\mu_0}$$

مشاهده می شود که از هر سه روش فوق به نتایج یکسانی حاصل شد.

مثال ۲.۵

شکل (۱۳-۲) قسمت متحرک یک الکترومغناطیس را نشان می دهد که به اندازه 1mm به طور محوری جابجا شده است. اگر طول فاصله هوایی g در مقدار 3mm ثابت نگهداشته شود، نیرویی که در صدد هم محور کردن قسمت های ساکن و متحرک می باشد را بدست آورید.



شکل ۱۳-۲: الکترومغناطیس، مثال ۲-۵

سایر داده ها به قرار زیر است.

$$\text{چگالی شار فاصله هوایی} = \text{تسلا یا } 0.8 \text{ Wb/m}^2 \quad \text{پهنای قطب} = w_p = 6\text{mm}$$

حل:

فرض کنید که تمام انرژی میدان در سطوح روبروی هم قطبها جای گرفته باشد. همانطور

که در شکل (۲-۱۳) نشان داده شده است، ارتفاع سطوح رویهم قرار گرفته را با x نشان می دهیم، مقاومت مغناطیسی این ناحیه برابر است با:

$$R_g = \frac{g}{\mu_0 x w_p} \rho$$

$$W_{fld} = \frac{1}{2} \phi_g^2 R_g = \frac{1}{2} \phi_g^2 \frac{g}{\mu_0 x w_p}$$

$$\therefore F_e = - \frac{\partial W_{fld}(\phi, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \phi_g^2 \frac{g}{\mu_0 w_p x^2}$$

$$\phi_g = B_g w_p x$$

$$F_e = \frac{1}{2} \frac{B_g^2 w_p^2 x^2 g}{\mu_0 w_p x^2} = \frac{1}{2} \frac{B_g^2 w_p g}{\mu_0} \quad (2-42)$$

دوباره:

$$W_{fld} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \Lambda g = \frac{1}{2} (Ni)^2 \frac{\mu_0 w_p x}{g}$$

$$\therefore F_e = - \frac{\partial W_{fld}(i, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} (Ni)^2 \frac{\mu_0 w_p}{g}$$

اما:

$$Ni = \frac{B_g}{\mu_0} g$$

$$\therefore F_e = \frac{1}{2} \left(\frac{B_g}{\mu_0} g \right)^2 \frac{\mu_0 w_p}{g} = \frac{1}{2} \frac{B_g^2 w_p g}{\mu_0} \quad (2-42 \text{ الف})$$

توجه کنید که F_e مستقل از مقدار جابجایی محوری است. با جایگذاری مقادیر در رابطه (۲-۴۲) خواهیم داشت:

$$F_e = \frac{1}{2} \frac{(0.8)^2 (6 \times 10^{-3}) (3 \times 10^{-3})}{4\pi \times 10^{-7}} = 4/584 \text{ نیوتن}$$

مثال ۲.۶

در شکل (۲-۱۴) یک سیم پیچ و پیستون مغناطیسی نشان داده شده است. سیم پیچ دارای ۱۵۰۰ دور و حامل جریان ۳۸ است. فرض کنید تمامی مقاومت مغناطیسی سیستم فقط توسط فاصله هوایی g تعیین شود. همچنین از پراکندگی شار مغناطیسی و نیز شکستگی شار مغناطیسی در فاصله هوایی صرف نظر کنید.

الف) برای طولهای فاصله هوایی: ۲ و ۱/۵ و ۱ و ۰/۵ سانتیمتر مطلوبست محاسبه مقادیر چگالی شار مغناطیسی و نیز ضرایب القاء سیم پیچ.

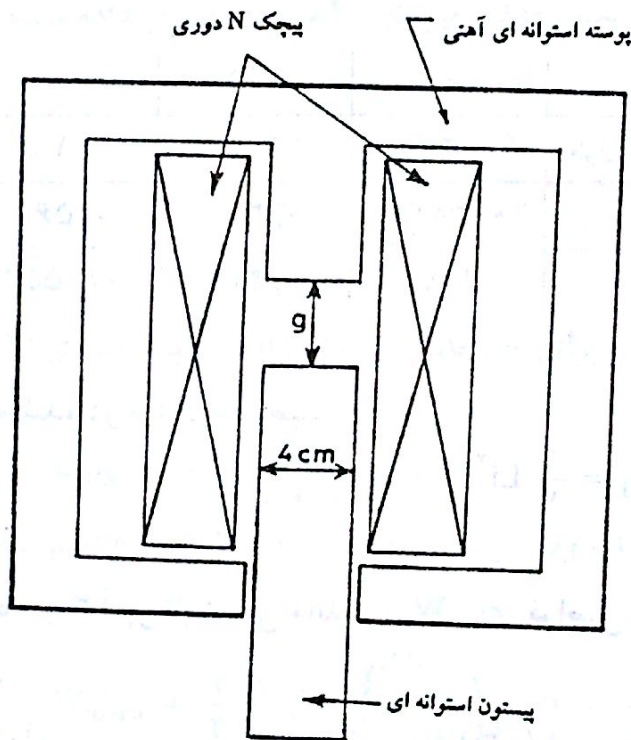
ب) برای فواصل هوایی مختلف داده شده در قسمت (الف) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی را بدست آورید.

ج) برای فواصل هوایی داده شده در قسمت (الف) مقادیر نیروهای الکترومغناطیسی مربوطه را محاسبه کنید.

د) اگر پیستون به آرامی حرکت کند بطوری که فاصله هوایی از $g = 2\text{cm}$ به $g = 0.5\text{cm}$ برسد کار مکانیکی انجام شده را پیدا کنید.



ه) برای شرایط بند (د) و با صرف نظر کردن از مقاومت سیم پیچ، انرژی الکتریکی که از منبع گرفته شده است را بیابید.



بند (د) در شرط

دارد:

① آرام

② فاصله هوایی از

۲ به ۰.۵ برسد

شکل ۱۴-۲: سیم پیچ و پیستون مغناطیسی، مثال ۶-۲

حل: الف) فرض کنید که پیستون در جهت نیروی مغناطیسی به اندازه طول کوچک dx تغییر مکان دهد بطوریکه طول فاصله هوایی جدید برابر $(g-x)$ شود. سپس mmf بر واحد طول فاصله هوایی خواهد شد:

$$H_g = \frac{Ni}{g-x}$$

چگالی شار برای هر فاصله هوایی دلخواه برابر است با:

$$B_g = \mu_0 H_g = \frac{\mu_0 Ni}{(g-x)} \text{ Wb/m}^2$$

حال مقدار اندوکتانس عبارتست از:

$$L = \frac{\text{شار در برگیرنده}}{\text{جریان}} = \frac{N}{i} (\phi)$$

$$= \frac{N}{i} \left(\frac{\text{mmf}}{\text{مقاومت مغناطیسی}} \right) = \frac{N}{i} \left(\frac{Ni}{\text{مقاومت مغناطیسی}} \right) = N^2$$

اگر طول فاصله هوایی (g-x) باشد، ضریب القاء سیم پیچ چنین خواهد بود:

$$L_x = N^2 \frac{\mu_0 A}{(g-x)}$$

به ازای طولهای مختلف فاصله هوایی مقادیر L_x و B_g در جدول زیر آورده شده است:

x بر حسب سانتیمتر	۰	۰/۵	۱	۱/۵
(طول فاصله هوایی) سانتیمتر (g-x)	۲	۱/۵	۱	۰/۵
B_g Wb/m ²	۰/۲۸۲۷	۰/۳۷۷	۰/۵۶۵	۱/۱۳۱
L هانری	۰/۱۷۸	۰/۲۳۷	۰/۳۵۵۳	۰/۷۱۰۶

ب) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی:

$$W_{fld} = \frac{1}{2} Li^2$$

چون جریان در مقدار ۳ آمپر ثابت می ماند، W_{fld} برای فواصل هوایی مختلف به ترتیب مقادیر زیر را دارد.

W_{fld} یا ژول $W \cdot \text{sec}$ ۰/۸ و ۱/۰۶۷ و ۱/۶۰ و ۳/۲

ج) نیروی مغناطیسی:

$$F_e = \frac{\partial W_{fld}}{\partial x} (\phi, x) = \frac{\partial W_{fld}}{\partial x} (i, x)$$

چون جریان ثابت است، بایستی از رابطه دوم استفاده شود بطوری که:

$$F_e = \frac{\partial W_{fld}(i, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL_x}{dx}$$

$$L_x = \frac{N^2}{\text{مقاومت مغناطیسی}} = N^2 \frac{\mu_0 A}{(g-x)}$$

به ازای $x=0$ داریم:

$$L = N^2 \frac{\mu_0 A}{g} = 0.178 \text{ H}$$

$$L_x = \frac{gL}{(g-x)}$$

و:

$$F_e = \frac{1}{2} i^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{gL}{g-x} \right) = \frac{1}{2} i^2 \left(\frac{gL}{(g-x)^2} \right)$$

به ازای فواصل هوایی مختلف، مقدار نیروی F_e در جدول زیر داده شده است:

(g-x) سانتیمتر	۲	۱/۵	۱	۰/۵
F_e نیوتن	۴۰	۷۱/۲	۱۶۰	۶۴۰

د) کار مکانیکی انجام شده برای جابجایی مجازی dx در جهت نیروی الکترومغناطیسی F_e

چنین خواهد شد:

$$F_e dx = \frac{1}{2} i^2 \frac{gL}{(g-x)^2} dx$$

کل کار مکانیکی انجام شده وقتی پیستون از $g = 2$ به $g = 0.5$ تغییر مکان می دهد برابر

است با:

$$W_{\text{mech}} = \frac{1}{2} i^2 gL \int_2^{0.5} \frac{1}{(g-x)^2} dx = \frac{1}{2} i^2 gL \left[\frac{1}{(g-x)} \right]^{0.5}$$

$$= \frac{1}{2} (3)^2 (2) (0.178) \left[\frac{1}{0.5} - \frac{1}{2} \right] = 2/4 \text{ (ژول)}$$

$$dW_{\text{elec}} = e i dt = i d\psi_x$$

(۵)

$$\text{دربرگیرنده} = \psi_x = i L_x = \frac{gL}{(g-x)} i$$

$$\frac{d\psi_x}{dx} = \frac{gL}{(g-x)^2} i$$

$$dW_{elec} = i \frac{d\psi_x}{dx} dx = i^2 \frac{gL}{(g-x)^2} dx \quad \text{بنابراین:}$$

$$W_{elec} = i^2 gL \int_0^{1/5} \frac{dx}{(g-x)^2} = 3^2 (2) (0.178) \left[\frac{1}{(g-x)} \right]^{1/5} = 4/8 \text{ ژول}$$

پس کل انرژی که از منبع گرفته می شود ۴/۸ وات ثانیه است و کار مکانیکی انجام شده برابر ۲/۴ وات ثانیه است. بقیه انرژی طبق رابطه (۲-۳) در میدان مغناطیسی ذخیره می شود. یعنی نصف انرژی الکتریکی منبع به انرژی مکانیکی تبدیل می شود و نصف دیگر آن در میدان مغناطیسی ذخیره می گردد. به عبارت دیگر وقتی جریان ثابت باشد، کار مکانیکی انجام شده برابر با انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی است. (جریان ثابت در اینجا آمپر است.)

در قسمت (ب) مشاهده می شود که انرژی ذخیره شده در میدان در فاصله هوایی بطول ۲ سانتیمتر، برابر ۰/۸ وات ثانیه است و وقتی طول فاصله هوایی برابر ۰/۵ سانتیمتر می شود مقدار آن به ۳/۲ وات ثانیه می رسد. بنابراین وقتی طول فاصله هوایی از ۲ به ۰/۵ سانتیمتر برسد انرژی مغناطیسی ذخیره شده به میزان وات ثانیه ۲/۴ = (۳/۲ - ۰/۸) افزایش می یابد.

مثال ۲.۷

برای سیستم مکانیکی که در شکل (۱۵-۲) نشان داده شده است، فرض کنید که تعداد انرژی میدان در ناحیه بین دو سطح روبروی هم قطب ها جای گرفته باشد و شعاع بسیار بزرگتر از طول فاصله هوایی g باشد. اگر بیشترین مقدار چگالی شار فاصله هوایی به $2/2 \text{ Wb/m}^2$ محدود شود، مقدار گشتاور را پیدا کنید. سایر داده ها به قرار زیر است:

$$r = 50 \text{ mm} \quad \text{شعاع}$$

$$g = 2 \text{ mm} \quad \text{طول فاصله هوایی}$$

$$l = 10 \text{ mm} \quad \text{طول عمود بر شعاع } r$$

حل: فرض کنید زاویه روی هم قرارگیری (هم پوشانی قطبها) برابر θ رادیان باشد، در اینصورت مقاومت مغناطیسی سری شده دو فاصله هوایی خواهد شد:

$$R_g = \frac{\gamma g}{\mu_0 (r \theta) l} \rightarrow ?$$

$$\therefore T_e = -\frac{1}{\gamma} \phi_{2g} \frac{d}{d\theta} (R_g) = -\frac{1}{\gamma} \phi_g^2 \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\gamma g}{\mu_0 (r \theta) l} \right] = \phi_g^2 \frac{g}{\mu_0 r \theta^2}$$

$$\phi_g = B_g A = B_g (r \theta l)$$

$$\therefore T_e = B_g^2 (r \theta l)^2 \frac{g}{\mu_0 r l \theta^2} = \left(\frac{B_g^2 g r l}{\mu_0} \right)$$

$$\text{بنحو دیگر} : T_e = \frac{1}{\gamma} \mathcal{F}^2 \frac{d \Lambda_g}{d\theta} = \frac{1}{\gamma} (Ni)^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\gamma \mu_0 r \theta l}{g} \right) = (Ni)^2 \frac{\mu_0 r l}{g}$$

$$Ni = \frac{B_g g}{\mu_0}$$

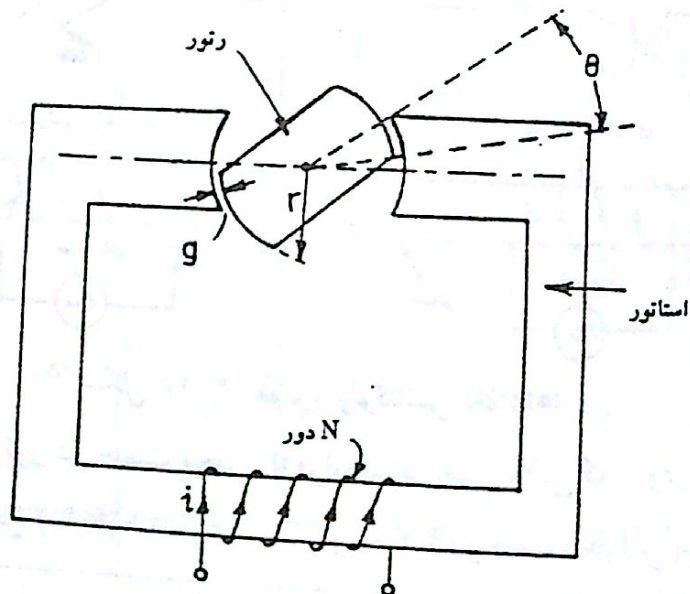
اما:

$$T_e = \left(\frac{B_g g}{\mu_0} \right)^2 \cdot \frac{\mu_0 r l}{g} = \frac{B_g^2 g r l}{\mu_0}$$

گشتاور T_e در جهت کاهش مقاومت مغناطیسی فاصله هوایی عمل می کند، یعنی محور بلند روتور می خواهد در جهت محور قطبهای استاتور قرار گیرد.

با جایگذاری مقادیر عددی در رابطه گشتاوری که بدست آورده ایم، داریم:

$$T_e = \frac{(2/2)^2 (2 \times 10^{-3}) (50 \times 10^{-3}) (10 \times 10^{-3})}{4\pi \times 10^{-7}} = 3/8515 \text{ N.m}$$

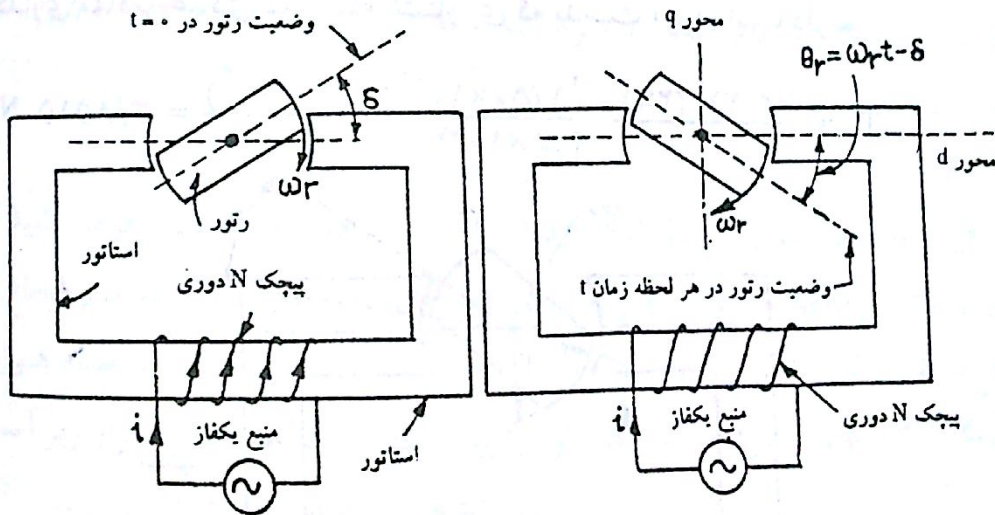


شکل ۱۵-۲: مربوط به مثال ۷-۲

۲-۳ موتور مقاومت مغناطیسی (رلوکتانسی)

در شکل (۲-۱۶) بعنوان نمونه یک موتور مقاومت مغناطیسی* یک فاز ابتدائی نشان داده شده است. این موتور هم در استاتور و هم در روتور دارای برجستگی (قطبهای برجسته) می باشد. مقاومت مغناطیسی یا هدایت مغناطیسی مدار مغناطیسی به زاویه نسبی بین موقعیت محورهای روتور و استاتور بستگی دارد. توسط ولتاژ تکفاز اعمال شده به سیم پیچ N دوری یک شار نوسانی در استاتور ایجاد می شود. این شار در طول محور قطبهای استاتور از فاصله هوایی عبور می کند. در شکل (۲-۱۶) محور شار استاتور توسط خط چین افقی نشان داده شده است. این محور قطبهای استاتور، محور مستقیم استاتور (یا محور طولی d) نامیده می شود. محور دیگری که با محور d ، 90° اختلاف دارد. محور عرضی یا محور عمودی q نامیده می شود. در شکل (b) ۲-۱۶ زاویه θ فضایی بین محور d استاتور و محور بلند روتور است.

وقتی زاویه فضایی θ_r برابر صفر باشد، مثلاً وقتی که محور بلند روتور بر محور d استاتور منطبق شود، در اینصورت آهن (با نفوذپذیری بسیار زیاد) با دو فاصله هوایی کوچک سری می شود و در نتیجه مقاومت مغناطیسی حاصل از مجموعه سیستم برای شار استاتور مینیمم می گردد. این مقاومت مغناطیسی مینیمم را \mathcal{R}_{H1} می نامیم.



(b) شکل ۲-۱۶: موتور رلوکتانس تکفاز (a)

وقتی محور بلند روتور در جهت محور q قرار گیرد یعنی وقتی که زاویه فضایی θ_r ، 90° باشد، در اینصورت آهن (با نفوذپذیری بسیار زیاد) با دو فاصله هوایی بسیار بزرگ سری

* Reluctance Motor

می شود و در نتیجه مقاومت مغناطیسی مجموعه سیستم برای شارهای مغناطیسی استاتور دارای بیشترین مقدار است که آنرا با R_q نشان می دهیم .

شکل (۲-۱۶) نشان می دهد که وقتی θ_r مقادیر 0 و π و 2π و ... را داشته باشد مقاومت مغناطیسی مربوط به شار استاتور R_H است و وقتی θ_r مقادیر $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و ... را داشته باشد ، این مقاومت مغناطیسی برابر R_q می باشد . پارامترهای R_q و R_H به ترتیب مقاومت مغناطیسی محور مستقیم و محور عرضی یا عمودی نامیده می شوند . تغییرات مقاومت مغناطیسی R بر حسب θ_r به شکل قطبهای استاتور و روتور بستگی دارد . در اینجا همانطور که در شکل (۲-۱۷) نشان داده شده است ، فرض می شود که تغییرات مقاومت مغناطیسی در تابعی سینوسی از زاویه θ_r باشد . شکل (۲-۱۷) نشان می دهد که مقادیر مقاومت مغناطیسی R بر حسب زاویه فضایی θ_r مطابق رابطه زیر تغییر می کند :

$$R = \frac{1}{\gamma} (R_q + R_H) - \frac{1}{\gamma} (R_q - R_H) \cos 2\theta_r \quad (2-43)$$

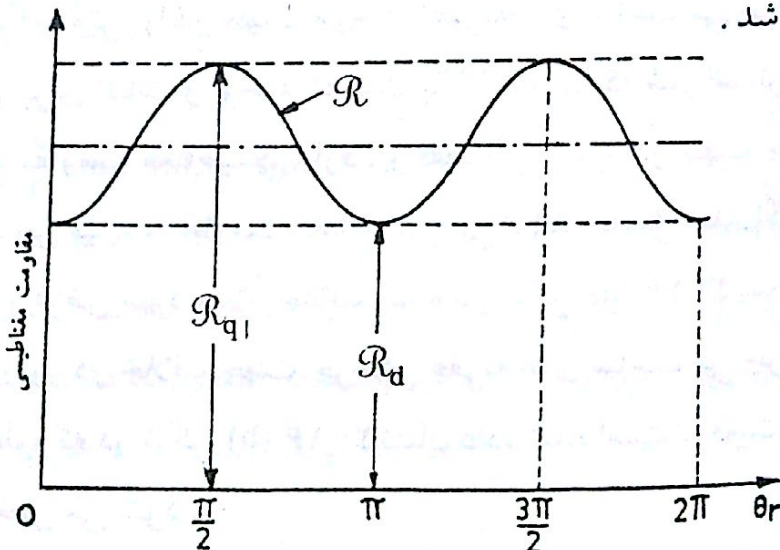
از رابطه (۲-۴۰) رابطه گشتاور بر حسب مقاومت مغناطیسی بدست می آید :

$$T_e = -\frac{1}{\gamma} \phi^2 \frac{dR}{d\theta_r} \quad (2-44)$$

با جایگذاری مقدار R از رابطه (۲-۴۳) در رابطه (۲-۴۴) داریم :

$$T_e = -\frac{1}{\gamma} \phi^2 (R_q - R_H) \sin 2\theta_r \quad (2-45)$$

فرض کنید شاری که توسط m.m.f سیم پیچ برابر Ni تولید می شود ، محدود به هسته استاتور باشد . همچنین چون در طراحی خوب دستگاههای مبدل انرژی مقاومت الکتریکی سیم پیچ ها کوچک است ، لذا در شکل (۲-۱۶) هم مقاومت الکتریکی سیم پیچ استاتور قابل اغماض می باشد .



شکل ۲-۱۷: تغییرات رلوکتانس با زاویه فضایی θ_r

بر طبق مفروضات فوق و براساس قانون ولتاژ کیرشلف، مقدار نیروی ضد محرکه E (یا عکس العملی) باید مساوی با ولتاژ اعمال شده V_1 باشد.

$$V_1 = E = \sqrt{2} \pi f N \phi_{\max}$$

∴

$$\phi_{\max} = \frac{V_1}{\sqrt{2} \pi f N}$$

اگر ولتاژ اعمال شده V_1 ، سینوسی باشد، شار سیم پیچ استاتور نیز موج سینوسی خواهد داشت.

$$\phi = \phi_{\max} \cos \omega t \quad (2-46)$$

فرض کنید که مقدار لحظه‌ای ϕ بصورت: در شکل (۲-۱۶) اگر اندازه ولتاژ اعمال شده V_1 ثابت بماند آنگاه صرف نظر از اینکه زاویه فضایی θ_r صفر یا 90° و یا هر مقدار دیگری باشد دامنه شار استاتور نیز ثابت می ماند.

رابطه $\frac{m.m.f}{\text{مقاومت مغناطیسی}}$ = شار نشان می دهد که وقتی برای شار ثابت مقاومت مغناطیسی مربوطه مینیم یعنی برابر \mathcal{R}_h باشد، در اینصورت جریان عبوری از سیم پیچ N دوری نیز مینیم خواهد بود و اگر مقاومت مغناطیسی ماکزیم مقدارش را داشته باشد (\mathcal{R}_h) مقدار این جریان نیز ماکزیم است.

همانطور که در شکل (a) ۲-۱۶ نشان داده شده است در زمان $t = 0$ روتور با زاویه δ نسبت به محور d استاتور زاویه دارد و طبق رابطه (۲-۴۶) شار ماکزیم مقدارش را داراست. مسیر این شار ماکزیم از میان آهن استاتور، آهن روتور و دو فاصله هوایی که با یکدیگر سری شده اند کامل می شود و در نتیجه قطبهای شمال و جنوب ایجاد شده در استاتور قطبهای جنوب و شمال القاء شده در روتور را جذب می کنند. بنابراین گشتاوری بوجود می آید که روتور را در جهت چرخش عقربه های ساعت می چرخاند.

روش دیگر برای اثبات و توجیه اتفاقات بالا آن است که شار استاتور تمایل به عبور از مسیر با مینیم مقاومت مغناطیسی دارد. و فقط اگر روتور در جهت چرخش عقربه های ساعت بچرخد این مینیم مقاومت مغناطیسی می تواند حاصل شد. اگر δ در طرف دیگر محور d استاتور فرض شود مثلاً "خلاف آنچه در شکل (a) ۲-۱۶ نشان داده شده است. در اینصورت روتور در خلاف جهت چرخش عقربه های ساعت می چرخد.

در زمان t همانطور که در شکل (b) ۲-۱۶ نشان داده شده است موقعیت روتور توسط زاویه فضایی θ_r مشخص می شود:

$$\theta_r = (\omega_r t - \delta) \quad (2-47)$$

ω_r سرعت زاویه ای محور بر حسب رادیان بر ثانیه است. در واقع گشتاوری که توسط موتور مقاومت مغناطیسی تک تحریریه ایجاد می شود نوسانات قابل ملاحظه ای دارد بنابراین سرعت لحظه ای هم ثابت نیست.

در اینجا با فرض آنکه روتور با سرعت زاویه ای ثابت ω_r رادیان بر ثانیه بچرخد، رابطه گشتاور را بدست می آوریم: اختلاف بین زمان سرعت زاویه ای ω (فرکانسی منبع بر

حساب رادیان بر ثانیه مثلاً $\omega = 2\pi f$) و سرعت زاویه ای محور ω_r ($= 2\pi n$) را باید مد نظر داشت. در اینجا n سرعت محور بر حسب r.p.s است.

با جایگذاری مقادیر ϕ و θ_r از روابط (۲-۴۶) و (۲-۴۷) در رابطه (۲-۴۵) عبارتی برای گشتاور بصورت زیر بدست می آید:

$$T_e = -\frac{1}{4} \phi_{\max}^2 \cos^2 \omega t (R_q - R_d) \sin(2\omega_r t - 2\delta)$$

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t)$$

$$T_e = -\frac{1}{4} \phi_{\max}^2 (R_q - R_d) [\sin(2\omega_r t - 2\delta) + \cos 2\omega t \sin(2\omega_r t - 2\delta)] \quad (2-48)$$

اما داریم:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

سپس:

$$\therefore T_e = -\frac{1}{4} \phi_{\max}^2 (R_q - R_d) [\sin(2\omega_r t - 2\delta) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_r t + 2\omega t - 2\delta)$$

$$+ \frac{1}{2} \sin(2\omega_r t - 2\omega t - 2\delta)] \quad (2-49)$$

این رابطه مقدار لحظه ای گشتاور را مشخص می کند. و اگر متوسط این رابطه را در یک سیکل کامل بدست آوریم مقدار متوسط گشتاور را خواهیم داشت. اگر سرعت زاویه ای محور ω_r با سرعت زاویه ای زمانی ω برابر نباشد در اینصورت مقدار متوسط گشتاور در یک سیکل کامل صفر خواهد بود. زیرا هر سه مولفه سینوسی داخل پرانتز با زمان تغییر می کنند.

بنابراین اگر $\omega_r \neq \omega$ آنگاه: $T_e(av) = 0$.

و اگر سرعت روتور در رابطه $\omega_r = \omega$ صدق کند گشتاور لحظه‌ای بصورت زیر بدست می آید.

$$T_e = -\frac{1}{4} \phi_{\max}^2 (R_q - R_d) [\sin(2\omega t - 2\delta) + \frac{1}{4} \sin(4\omega t - 2\delta) + \frac{1}{4} \sin(-2\delta)] \quad (2-50)$$

در این رابطه دو مولفه اول داخل پراتز با فرکانس دو و چهار برابر فرکانس تغذیه تغییر می کنند بنابراین در یک سیکل کامل مقدار متوسطشان صفر است و لیکن مولفه $\frac{1}{4} \sin(-2\delta)$ با زمان تغییر نمی کند بطوری که:

$$T_e(av) = -\frac{1}{4} \phi_{\max}^2 (R_q - R_d) \left[\frac{1}{4} \sin(-2\delta) \right] = \frac{1}{8} \phi_{\max}^2 (R_q - R_d) \sin 2\delta \quad (2-51)$$

بنابراین موتور مقاومت مغناطیسی فقط در یک سرعت گشتاور ایجاد می کند که به آن سرعت سنکرون گفته می شود.

طبق معمول موتور مقاومت مغناطیسی دارای گشتاور راه اندازی نیست. با قراردادن یک سیم پیچ بر روی کفش قطبهای روتور برای موتور مقاومت مغناطیسی به صورت القائی گشتاور راه اندازی تولید می شود و به محض آنکه سرعت روتور به نزدیکیهای سرعت سنکرون رسید روتور با یک ضربه با سرعت ثابت سنکرونی بطور دائم به گردش خود ادامه می دهد.

ماکزیمم گشتاور متوسط با $\delta = 45^\circ$ بدست می آید که عبارتست از:

$$T_e(av)_{\max} = \frac{1}{8} \phi_{\max}^2 (R_q - R_d)$$

متوسط گشتاور بدست آمده از رابطه (2-51) را می توان بنحو دیگری بصورت زیر بیان کرد:

$$L_d = \frac{N^2}{R_d}, \quad \text{ضریب القاء محور مستقیم}$$

$$L_q = \frac{N^2}{R_q}, \quad \text{ضریب القاء محور عرضی}$$

$$\therefore T_e(av) = \frac{\phi_{\max}^2}{8} \left(\frac{N^2}{L_q} - \frac{N^2}{L_d} \right) \sin 2\delta = \frac{1}{8} \omega \phi_{\max}^2 N^2 \left(\frac{1}{\omega L_q} - \frac{1}{\omega L_d} \right) \sin 2\delta$$

$\omega L_d = X_d$ و X_d را راکتانس محور مستقیم (طولی) می نامیم و بصورت مشابهی:
 $\omega L_q = X_q$ و X_q را راکتانس محور q (عرضی) می نامیم. بعلاوه:

$$V_t = \sqrt{2} \pi f N \phi_{\max}$$

$$N\phi_{\max} = \frac{V_t}{\sqrt{2} \pi f} = \frac{\sqrt{2} V_t}{\omega}$$

یا:

$$\therefore T_e(av) = \frac{V_t^2}{4\omega} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta$$

(۲-۵۲)

$$T_e(av) = \frac{V_t}{4\omega} \left(\frac{V_t}{X_q} - \frac{V_t}{X_d} \right) \sin 2\delta$$

همچنین:

$$T_e(av) = \frac{V_t}{4\omega} (I_q - I_d) \sin 2\delta$$

یا:

(۲-۵۳)

در اینجا I_q و I_d جریانهای اخذ شده از منبع تغذیه توسط موتور است وقتی که به ترتیب روتور در موقعیتهای مینیمم و ماکزیمم مقاومت مغناطیسی قرار می گیرد.

مقاومت‌های مغناطیسی R_q و R_d به شکل هندسی مدار مغناطیسی بستگی دارد و بنابراین برای یک موتور بخصوص مقادیر ثابتی هستند. با ثابت ماندن مقدار ولتاژ منبع، شار ϕ_{\max} هم ثابت می ماند و بنابراین در رابطه (۲-۵۱) فقط زاویه δ متغیر است.

در شکل (۲-۱۸) نمودار تغییرات $T_e(av)$ با δ نشان داده شده است. اگر گشتاور بار موتور

تغییر کند زاویه δ خودش را طوری تنظیم می کند که گشتاور مقاومت مغناطیسی تولیدی با گشتاور جدید بار برابر شود. بهمین دلیل زاویه δ را زاویه بار می نامند. با افزایش بار موتور، زاویه بار δ افزایش می یابد تا در 45° به ماکزیمم مقدارش برسد. پس از آن با افزایش بیشتری در بار موجب خارج شدن موتور از حالت سنکرون و توقف آن خواهد شد.

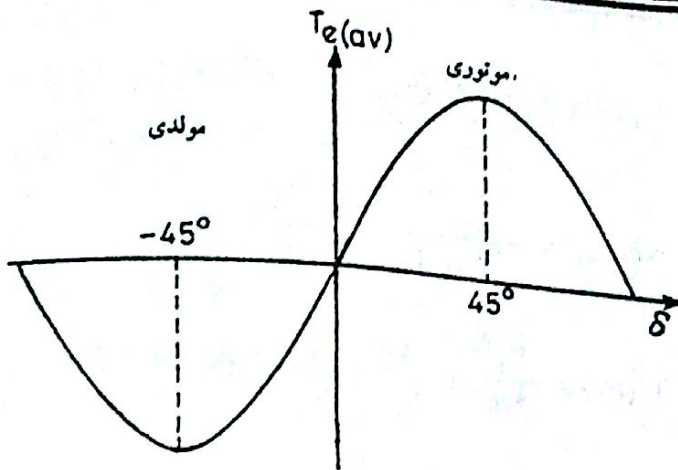
ماشین مقاومت مغناطیسی تکفاز بصورت ژنراتور هم می تواند کار کند. برای این منظور ماشین باید ابتدائاً "بصورت موتور مقاومت مغناطیسی بچرخد و سپس توسط چرخاننده،

توان مکانیکی تحویل محور ماشین گردد. به تدریج که توان مکانیکی ورودی به محور افزایش می یابد موقعیت فضایی روتور پیشروی می کند، بطوری که زاویه δ ابتدا کاهش می

یابد و بعد منفی می شود. به محض اینکه زاویه δ منفی شد ماشین بصورت ژنراتور شروع بکار می کند و انرژی مکانیکی ورودی را به انرژی الکتریکی خروجی تبدیل می کند.

شکل (۲-۱۸). در یک فرکانس ثابت منبع، موتورهای مقاومت مغناطیسی تکفاز با سرعت سنکرون ثابت کار می کنند و بهمین دلیل در سطح وسیعی در ساعتهای برقی و دیگر وسایل

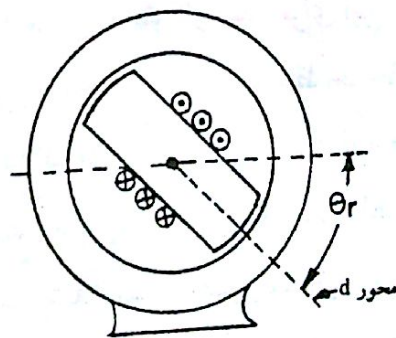
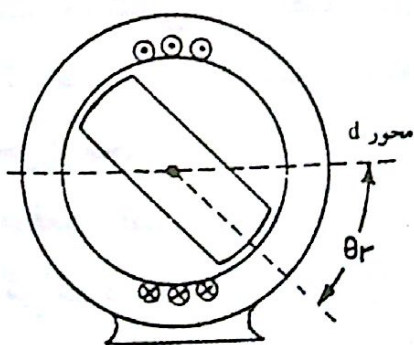
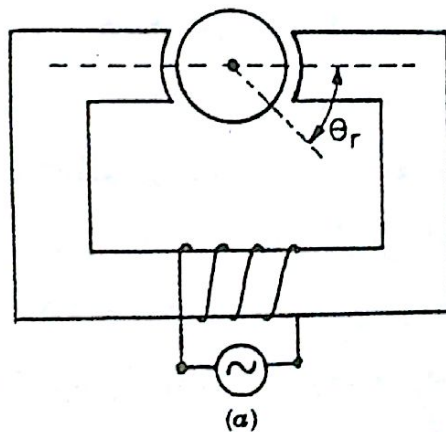




شکل ۲-۱۸: منحنی گشتاور - زاویه بار یک موتور مقاومت مغناطیسی

زمان سنجی کاربرد دارند .

در موتور یک تحریکه نشان داده شده در شکل (۲-۱۶) ، چون مقاومت مغناطیسی که شار استاتور می بیند، با حرکت روتور تغییر می کند، گشتاور مقاومت مغناطیسی تولید می شود. در شکل (۲-۱۶) اگر روتور قطب برجسته با رتور استوانه ای عوض شود، مانند آنچه که در شکل (۲-۱۹ الف) نشان داده شده است ، در اینصورت مقاومت مغناطیسی شار استاتور برای تمام موقعیتهای روتور ثابت باقی می ماند، بنابراین گشتاور مقاومت مغناطیسی تولید نمی شود.



(b)

(c)

شکل ۲-۱۹: (a) روتور قطب برجسته شکل ، ۲-۱۶ با روتور استوانه ای عوض شده است . (b) گشتاور مقاومت مغناطیسی وجود دارد . (c) گشتاور مقاومت مغناطیسی وجود ندارد

پس می توان نتیجه گرفت که گشتاور مقاومت مغناطیسی فقط در برخی از ماشینهای الکتریکی که در آنها با حرکت روتور، مقاومت مغناطیسی دیده شده توسط شار عمل کننده (مفید) تغییر می کند، وجود دارد.

مثلاً در شکل (b) ۱۹-۲ (ماشین سنکرون) گشتاور مقاومت مغناطیسی وجود دارد زیرا شار عمل کننده استاتور مقاومت مغناطیسی رامی بیند که تابعی از زاویه فضایی θ_r است. در شکل (c) ۱۹-۲ شار عمل کننده روتور مقاومت مغناطیسی ثابتی می بیند لذا گشتاور مقاومت مغناطیسی تولید نمی شود.

مثال ۲.۸

در موتور مقاومت مغناطیسی تک فازی که در شکل (۱۶-۲) نشان داده شده است عبارتی برای جریان لحظه ای i بر حسب مقاومت مغناطیسی، شار ماکزیم ϕ_{max} ، ω ، t و θ بدست آورید.

با صرف نظر کردن از مقاومت سیم پیچ، عبارتی برای گشتاور الکترومغناطیسی متوسط بر حسب مقاومت مغناطیسی و شار ماکزیم بدست آورید.

حل: در شکل (۱۷-۲) منحنی تغییرات مقاومت مغناطیسی با زاویه موقعیت روتور θ_r نشان داده شده است، از رابطه (۴۳-۲)، مقاومت مغناطیسی را برای مقادیر مختلف زاویه فضایی θ_r می توان بدست آورد:

$$\therefore \mathcal{R} = \frac{1}{\mu} (\mathcal{R}_q + \mathcal{R}_d) - \frac{1}{\mu} (\mathcal{R}_q - \mathcal{R}_d) \cos 2\theta_r \quad (2-43)$$

و مقدار لحظه ای شار توسط رابطه (۴۶-۲) بدست می آید:

$$\phi = \phi_{max} \cos \omega t \quad (2-46)$$

و با صرف نظر کردن از m.m.f مسیر آهن، mmf کل مسیر مغناطیسی بسته شکل (۱۶-۲) چنین خواهد بود:

$$Ni = \phi \mathcal{R} \quad \text{و} \quad \text{m.m.f سیم پیچ} = \text{m.m.f کل}$$

یا:

$$i = \frac{\phi \mathcal{R}}{N} \quad (2-54)$$

با جایگذاری مقادیر ϕ و \mathcal{R} در رابطه (۵۴-۲) داریم:

$$i = \frac{\phi_{max} \cos \omega t}{N} \left[\frac{1}{\mu} (\mathcal{R}_q + \mathcal{R}_d) - \frac{1}{\mu} (\mathcal{R}_q - \mathcal{R}_d) \cos 2\theta_r \right]$$

همانطور که قبلاً هم داشتیم: $\theta_r = \omega_r t - \delta$

$$\therefore i = \frac{\phi_{\max} \cos \omega t}{\sqrt{2} N} \left[(R_q + R_d) - (R_q - R_d) \cos (2 \omega_r t - 2\delta) \right]$$

اگر سرعت زاویه ای روتور ω_r با سرعت زاویه ای زمانی ω برابر باشد آنگاه رابطه زیر برای جریان لحظه ای ایدست می آید:

$$i = \frac{\phi_{\max}}{\sqrt{2} N} \left[(R_q + R_d) \cos \omega t - (R_q - R_d) \cos (2 \omega_r t - 2\delta) \cos \omega t \right]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \left[\cos (A + B) + \cos (A - B) \right]$$

$$\therefore i = \frac{\phi_{\max}}{\sqrt{2} N} \left[(R_q + R_d) \cos \omega t - \frac{1}{2} (R_q - R_d) \{ \cos(3\omega t - 2\delta) + \cos(\omega t - \delta) \} \right]$$

و این همان رابطه مطلوب برای جریان لحظه ای i است.

حالت: $v = ir + \frac{d\psi}{dt} = 0 + \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} (N \phi_{\max} \cos \omega t) = -N \phi_{\max} \omega \sin \omega t$

توان لحظه ای ورودی: $p = vi$ توان لحظه ای

یا:

$$p = -\omega N \phi_{\max} \sin \omega t \cdot \frac{\phi_{\max}}{\sqrt{2} N} \left[(R_q + R_d) \cos \omega t - \frac{1}{2} (R_q - R_d) \right]$$

$$\left\{ \cos (3\omega t - 2\delta) + \cos (\omega t - 2\delta) \right\}$$

$$p = -\frac{\omega \phi_{\max}^2}{\sqrt{2}} \left[(R_q + R_d) \sin \omega t \cos \omega t - \frac{1}{2} (R_q - R_d) \{ \cos (3\omega t - 2\delta) + \cos (\omega t - 2\delta) \} \sin \omega t \right]$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin (A + B) + \sin (A - B)] \quad \text{اما:}$$

$$\therefore p = -\frac{\omega \phi_{\max}^2}{\sqrt{2}} \left[\frac{R_q + R_d}{2} \sin 2\omega t - \frac{1}{4} (R_q - R_d) \{ \sin(4\omega t - 2\delta) + \sin(-2\omega t + 2\delta) + \sin(2\omega t - 2\delta) + \sin 2\delta \} \right]$$

و چون: $\sin(-\omega t + 2\delta) + \sin(2\omega t - 2\delta) = 0$ پس خواهیم داشت:

$$P = -\frac{\omega \phi_{\max}^2}{2} \left[\frac{R_a + R_d}{2} \sin 2\omega t - \frac{1}{4} (R_q - R_d) \right]$$

$$\left[\sin(4\omega t - 2\delta) + \sin 2\delta \right]$$

در مولفه سینوسی اول داخل پرانتز به ترتیب با فرکانسی دو و چهار برابر فرکانس تغییر می کنند بنابراین مقدار متوسطشان صفر است. سومین مولفه سینوسی مستقل از زمان است پس مقدار متوسط عبارت فوق بصورت رابطه زیر بدست می آید:

$$P = -\frac{\omega \phi_{\max}^2}{2} \left[-\frac{1}{4} (R_q - R_d) \sin 2\delta \right] = \frac{\omega \phi_{\max}^2}{8} (R_q - R_d) \sin 2\delta$$

$$\therefore T_e (av) = \frac{P}{\omega} = \frac{\phi_{\max}^2}{8} (R_q - R_d) \sin 2\delta$$

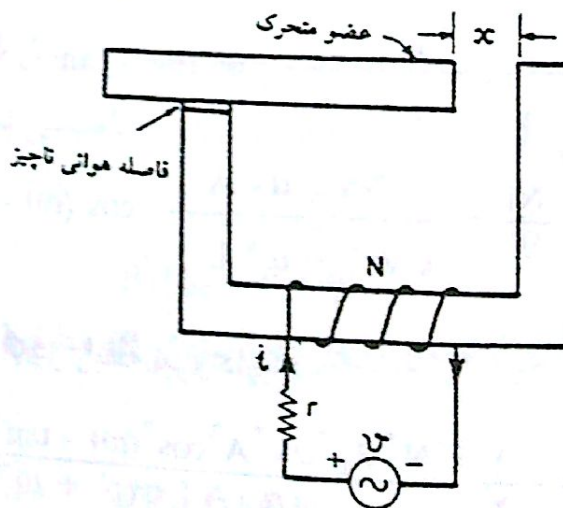
این رابطه با آنچه که قبلاً در رابطه (۲-۵۱) بدست آورده بودیم مطابقت دارد.

مثال ۲.۹

برای دستگاه الکترومغناطیسی نشان داده شده در شکل (۲-۲۰)، سطح مقطع عمود بر خطوط شار برابر A است و مقاومت مغناطیسی فقط بواسطه فاصله هوایی است. نیروی متوسطی را که به قسمت متحرک وارد می شود بر حسب N و x و A و ... بدست آورید وقتی که:

$$i = I_m \cos \omega t \quad (\text{الف})$$

$$v = V_m \cos \omega t \quad (\text{ب})$$



شکل ۲-۲۰: مربوط به مثال ۲-۹

حل :

الف) مقاومت مغناطیسی فاصله هوایی $= \frac{x}{\mu_0 A}$

$$L_x = \frac{N^2 \mu_0 A}{x}$$

$$W_{fld}(i,x) = \frac{1}{2} i^2 L_x = \frac{1}{2} i^2 \frac{N^2 \mu_0 A}{x}$$

از رابطه (۲-۶۲)

$$F_e = \frac{\partial W_{fld}}{\partial x}(i,x) = -\frac{1}{2} i^2 \frac{N^2 \mu_0 A}{x^2} = -\frac{1}{2} \frac{N^2 \mu_0 A}{x^2} I_m^2 \cos^2 \omega t$$

$$= -\frac{1}{2} i^2 \frac{N^2 \mu_0 A}{x^2} I_m^2 \left[\frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \right]$$

$$F_e (av) = -\frac{1}{4} \frac{N^2 \mu_0 A}{x^2} I_m^2$$

ب) از رابطه (۲-۳۱) :

$$F_e = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{1}{\mu_0 A}$$

$$v = ri + L_x \frac{di}{dt}$$

برای مدار الکتریکی :

به ازای $v = V_m \cos \omega t$ پاسخ حالت ماندگار این معادله عبارتست از :

$$\bar{i} = \frac{V_m}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L_x^2}} \angle \tan^{-1} \frac{\omega L_x}{r}$$

$$i = \frac{V_m}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L_x^2}} \cos(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L_x}{r})$$

از طرفی :

$$\phi = \frac{Ni}{\mathcal{R}} = \frac{NV_m \mu_0 A}{x \sqrt{r^2 + \omega^2 L_x^2}} \cos(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L_x}{r})$$

با جایگذاری این مقدار ϕ در رابطه نیرو داریم :

$$F_e = -\frac{1}{2} \frac{N^2 V_m^2 \mu_0^2 A^2 \cos^2(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L_x}{r})}{\mu_0 A [x (r^2 + \omega^2 L_x^2)]}$$

و چون: $L_x = \frac{N^2 \mu_0 A}{x}$ داریم:

$$F_e = -\frac{1}{2} \frac{N^2 V_m^2 \mu_0 A}{[r^2 x^2 + (\omega N^2 \mu_0 A)^2]} \cos^2 \left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L_x}{r} \right)$$

$$\therefore F_{e(av)} = -\frac{1}{4} \frac{V_m^2 N^2 \mu_0 A}{[(rx)^2 + (\omega N^2 \mu_0 A)^2]}$$

۲-۴ سیستم های مغناطیسی دو تحریر

سیستم های مغناطیسی تک تحریر کاربردهای متنوع و وسیعی دارند مثلاً در آهنرباهای الکتریکی - رله ها - دستگاههای اندازه گیری با آهن گردان - موتورهای مقاومت مغناطیسی و نظایر آن.

بیشتر دستگاههای مبدل انرژی الکترومغناطیسی را سیستمهای مغناطیسی دو تحریر یا چند تحریر تشکیل می دهند. سیستم مغناطیسی دو تحریر دستگاهی است که دو منبع تحریر مستقل دارد نمونه هایی از این دستگاهها ماشینهای سنکرون، بلندگوها، تاکومترها (سرعت سنج)، ماشینهای شنت dc و هستند.

شکل (۲-۲۱) مدل ساده ای از سیستم مغناطیسی دو تحریر را نشان می دهد. در این مدل روتور و استاتور از جنس آهن و از نوع قطب برجسته هستند.

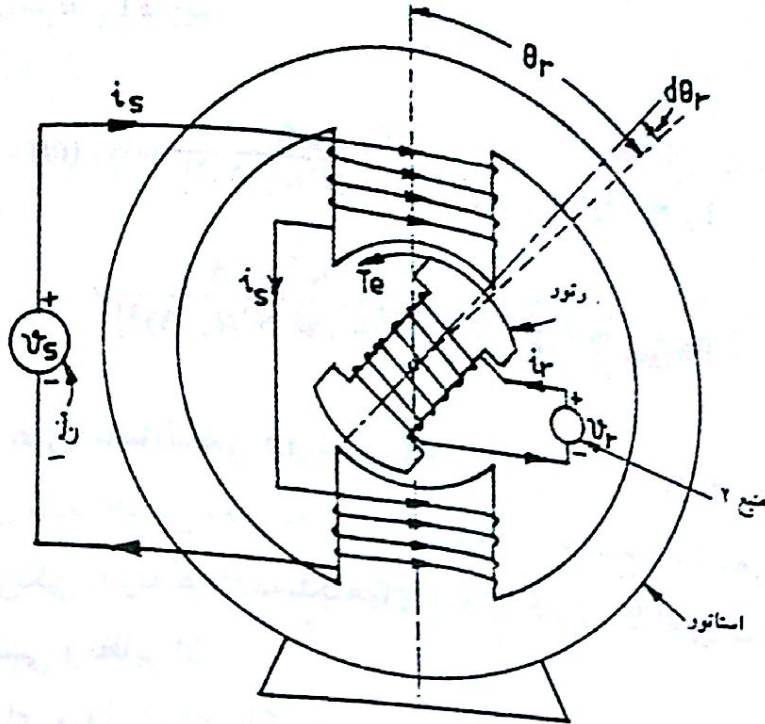
استاتور دارای N_s دور و روتور دارای N_r دور است. منبع ۱ استاتور و منبع ۲ روتور را تغذیه می کند. سیم پیچ های استاتور و روتور $m.m.f$ های هم جهتی تولید می کنند و همانطور که در شکل (۲-۲۱) نشان داده شده است. گشتاور مغناطیسی T_e در خلاف جهت عقربه های ساعت است. برای سادگی از اشباع مغناطیسی و پس ماند صرف نظر می کنیم. از رابطه (۲-۷) جزء انرژی الکتریکی را که به سیستم مغناطیسی تک تحریر داده می شود بدست می آوریم:

$$dW_{elec} = id\psi$$

بنابراین در شکل (۲-۲۱) جزء انرژی الکتریکی جزئی که منابع ۱ و ۲ به سیستم می دهند چنین خواهد بود:

$$dW_{elec} = i_s d\psi_s + i_r d\psi_r \quad (۲-۵۵)$$

در اینجا ψ_s و ψ_r کل شار دربرگیرنده لحظه ای سیم پیچ های استاتور و روتور هستند. و



شکل ۲-۲۱: سیستم مغناطیسی دو تحریکه

چون از اشباع صرف نظر کرده ایم ψ_s و ψ_r بر حسب ضرایب خود القاء و القاء متقابل بصورت زیر نوشته می شوند:

$$\left. \begin{aligned} \psi_s &= L_s i_s + M_{sr} i_r \\ \psi_r &= L_r i_r + M_{rs} i_s \end{aligned} \right\} \quad (2-56)$$

L_s = ضریب خود القاء خودی سیم پیچ استاتور

L_r = ضریب خود القاء خودی سیم پیچ روتور

$M_{sr} = M_{rs}$ = ضریب خود القاء متقابل سیم پیچ های استاتور و روتور

در شکل (۲-۲۱) مقدار اولیه زاویه فضایی بین محورهای روتور و استاتور θ_r است و فرض می کنیم جریانهای i_s و i_r صفر هستند. حال سیم پیچ های استاتور و روتور به منابع تغذیه مربوطه شان وصل می شوند. بطوری که جریانهای آنها به ترتیب از صفر به مقادیر i_s و i_r می رسند.

اگر روتور مجاز به حرکت کردن نباشد dW_{mech} صفر است و رابطه (۲-۳) بصورت زیر خواهد شد:

$$dW_{elec} = \dots + dW_{fld}$$

بنابراین با ثابت نگه داشتن روتور، همه انرژی الکتریکی که دو منبع تغذیه می دهد، در

میدان مغناطیسی ذخیره می شود.

از رابطه (۲-۵۵):

$$dW_{fld} = dW_{elec} = i_s d\psi_s + i_r d\psi_r$$

$$= i_s d(L_s i_s + M_{sr} i_r) + i_r d(L_r i_r + M_{rs} i_s) \quad (2-57)$$

از مثال (۲-۶)

$$L_s = \frac{N_s^2}{\mathcal{R}_s} \quad \text{و} \quad L_r = \frac{N_r^2}{\mathcal{R}_r}$$

و از قسمت (۱-۱۶):

$$M_{sr} = M_{rs} = \frac{N_s N_r}{\mathcal{R}_{sr}}$$

که در آن:

$\mathcal{R}_s =$ مقاومت مغناطیسی که شار استاتور می بیند

$\mathcal{R}_r =$ مقاومت مغناطیسی که شار روتور می بیند

$\mathcal{R}_{sr} =$ مقاومت مغناطیسی که شار متوجه استاتور و روتور می بیند

چون روتور حرکت نمی کند مقاومت مغناطیسی و ضرایب القاء ثابت می مانند. در نتیجه

تغییرات جزئی ضرایب القاء یعنی dL_s و dL_r و dM_{sr} در رابطه (۲-۵۷) صفر هستند.

بنابراین از رابطه (۲-۵۷):

$$dW_{fld} = i_s L_s di_s + i_s M_{sr} di_r + i_r L_r di_r + i_r M_{sr} di_s$$

$$= i_s L_s di_s + i_r L_r di_r + M_{sr} d(i_s i_r)$$

انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی در اثنای افزایش جریانها از صفر به مقادیر i_s و i_r ، از

رابطه (۲-۵۸) بقرار زیر بدست می آید:

$$W_{fld} = L_s \int_0^{i_s} i_s di_s + L_r \int_0^{i_r} i_r di_r + M_{sr} \int_0^{i_s i_r} d(i_s \cdot i_r)$$

$$= \frac{1}{2} i_s^2 L_s + \frac{1}{2} i_r^2 L_r + M_{sr} i_s i_r \quad (2-58)$$

برای بدست آوردن گشتاور مغناطیسی T_e ، فرض می شود که مطابق شکل (۲-۲۱)، روتور

جابجایی $d\theta_r$ را در جهت T_e داشته باشد. با حرکت روتور مقاومتهاى مغناطیسی \mathcal{R}_r ، \mathcal{R}_s

و \mathcal{R}_{sr} تغییر می کنند و لذا ضرایب القاء L_s و L_r و M_{sr} هم باید تغییر کنند.

در ضمن جابجایی مجازی $d\theta_r$ ، انرژی الکتریکی جزئی ورودی dW_{elec} مطابق رابطه

(۲-۵۷) بدست می آید:

$$dW_{elec} = i_s d[L_s i_s + M_{sr} i_r] + i_r d[L_r i_r + M_{sr} i_s]$$

$$= i_s L_s di_s + i_s^2 dL_s + i_s M_{sr} di_r + i_s i_r dM_{sr} + i_r L_r di_r + i_r^2 dL_r + i_r M_{sr} di_s + i_s i_r dM_{sr}$$

در طی جابجایی مجازی $d\theta_r$ ، انرژی مغناطیسی ذخیره شده جزئی از رابطه (۲-۵۸) بدست می آید:

$$dW_{fld} = \frac{1}{2} i_s^2 dL_s + L_s i_s di_s + \frac{1}{2} i_r^2 dL_r + L_r i_r di_r + M_{sr} i_s di_r + M_{sr} i_r di_s + i_s i_r dM_{sr}$$

در طی جابجایی $d\theta_r$ ، کار مکانیکی انجام شده جزئی dW_{mech} خواهد شد:

$$dW_{mech} = T_e \cdot d\theta_r$$

با جایگذاری مقادیر dW_{elec} ، dW_{mech} و dW_{fld} در رابطه (۲-۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & i_s L_s di_s + i_s^2 dL_s + i_r L_r di_r + i_r^2 dL_r + i_s M_{sr} di_r + i_r M_{sr} di_r + i_s i_r dM_{sr} \\ & = (T_e \cdot d\theta_r) + \frac{1}{2} i_s^2 dL_s + L_s i_s di_s + \frac{1}{2} i_r^2 dL_r + L_r i_r di_r + i_s M_{sr} di_r + \\ & + i_r M_{sr} di_s + i_s i_r dM_{sr} \end{aligned}$$

در رابطه فوق مولفه هایی که زیرشان خط کشیده شده است از طرفین معادله حذف شده و داریم:

$$\frac{1}{2} i_s^2 dL_s + \frac{1}{2} i_r^2 dL_r + i_s i_r dM_{sr} = T_e d\theta_r \quad (۲-۵۹)$$

$$T_e = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_s}{d\theta_r} + \frac{1}{2} i_r^2 \frac{dL_r}{d\theta_r} + i_s i_r \frac{dM_{sr}}{d\theta_r} \quad (۲-۶۰)$$

در رابطه (۲-۶۰) می توان دید که تغییرات جزئی در جریانهای di_s و di_r در تولید گشتاور مغناطیسی T_e بی تاثیرند. بنابراین گشتاور T_e بستگی به:

(۱) مقادیر لحظه ای i_s و i_r .

(۲) نرخ تغییرات ضرایب القاء بر حسب تغییرات زاویه دارد.

اگر از رابطه (۲-۵۸) از W_{fld} نسبت به زاویه فضایی θ_r مشتق گرفته شود، در حالیکه جریانها ثابت فرض شوند، سمت راست رابطه (۲-۶۰) بدست می آید:

بنابراین گشتاور مغناطیسی T_e را می توان با مشتق گرفتن از رابطه انرژی میدان نسبت به زاویه فضایی بقرار زیر بدست آورد:

$$T = \frac{\partial W_{fld}}{\partial \theta_r} (i_s, i_r, \theta_r) \quad (۲-۶۱)$$

اینجا W_{fld} باید بر حسب مولفه های i_s و i_r و θ_r بیان شود و نیز در حین مشتق جزئی گرفتن جریان باید ثابت نگهداشته شود.

اگر از رابطه (۲-۵۷) از dW_{elec} با فرض ثابت ماندن جریانها، انتگرال بگیریم داریم:

$$W_{elec} = i_s^2 L_s + i_r^2 L_r + 2i_s i_r L_r$$

برای مدار مغناطیسی خطی رابطه $W_{fld} = W'_{fld}$ صادق است و بنابراین رابطه (۲-۶۱) بصورت زیر نوشته می شود:

$$T_e = \frac{\partial W'_{fld}}{\partial \theta} (i_s, i_r, \theta_r) \quad \text{(الف ۲-۶۲)}$$

از مقایسه روابط (۲-۵۸) و (۲-۵۹) و (۲-۶۲) نتیجه می شود که اگر ورود انرژی الکتریکی به مدار همانطور که در رابطه (۲-۶۲) نشان داده می شود تحت جریانهای ثابت صورت گیرد آنگاه نصف آن به انرژی مکانیکی تبدیل می شود (مطابق رابطه ۲-۵۹). و نصف دیگر تحت جریانهای ثابت در میدان مغناطیسی ذخیره می شود. (رابطه ۲-۵۸) به عبارت دیگر تحت جریانهای ثابت کار مکانیکی انجام شده و انرژی ذخیره شده در میدان با هم برابرند. با مراجعه به شکل (۲-۲۲) می توان نیروی مغناطیسی خطی F_e را برای سیستم مغناطیسی دو تحریکه بدست آورد.

انرژی الکتریکی جزئی ورودی که از دو منبع انرژی گرفته می شود برابر است با:

$$dW_{elec} = i_1 d\psi_1 + i_2 d\psi_2$$

$$\psi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

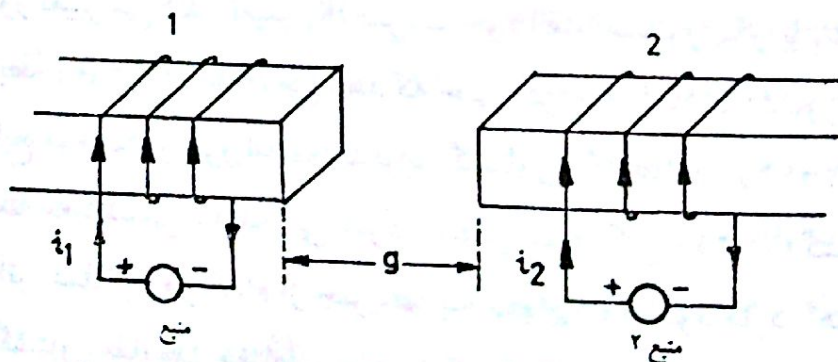
$$\psi_2 = L_2 i_2 + M_{21} i_1$$

$$M_{12} = M_{21}$$

در اینجا:

و:

همچنین:



شکل ۲-۲۲: سیستم مغناطیسی دو تحریکه خطی

با استفاده از همان روندی که گشتاور مغناطیسی T_e محاسبه شد، نیروی مغناطیسی F_e را نیز

می توان بدست آورد . که در این راستا روابط زیر بدست می آیند :

$$F_e = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{dx} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{dx} + i_1 i_2 \frac{dM_{12}}{dx} \quad (۲-۶۳ \text{ الف})$$

یا :

$$F_e = \frac{\partial W_{fld}}{\partial x} (i_1, i_2, x) \quad (۲-۶۳ \text{ ب})$$

یا :

$$= \frac{\partial W'_{fld}}{\partial x} (i_1, i_2, x) \quad (۲-۶۳ \text{ ج})$$

با بررسی روابط (۲-۶۱) و (۲-۶۳) مشخص می شود که گشتاور نیروهای مغناطیسی در جهت عمل می کند که با جریانهای ثابت باعث افزایش انرژی میدان گردند .

۲-۴-۱ گشتاورهای الکترومغناطیسی و مقاومت مغناطیسی

از رابطه (۲-۶۰) می توان گشتاور کلی را که سیستم مغناطیسی دو تحریکه تولید می کند بدست آورد . این رابطه را اکنون مفصلاً بررسی می کنیم و نتایج جالبی بدست خواهیم آورد .

در شکل (۲-۲۱) اگر $i_r = 0$ باشد آنگاه از رابطه (۲-۶۰) خواهیم داشت :

$$T_e = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_s}{d\theta_r} \quad (۲-۶۴ \text{ الف})$$

و اگر $i_s = 0$ باشد :

$$T_e = \frac{1}{2} i_r^2 \frac{dL_r}{d\theta_r} \quad (۲-۶۴ \text{ ب})$$

رابطه (۲-۶۲ الف) نشان می دهد که حتی اگر $i_r = 0$ باشد گشتاور می تواند تولید شود زیرا شاری که استاتور تولید می کند مقاومت مغناطیسی R_s را می بیند و این مقاومت مغناطیسی باموقعیت روتور تغییر می کند . تغییر R_s ضریب خود القاء استاتور L_s را با θ_r تغییر می دهد . بطور مشابه رابطه (b) ۲-۶۴ نشان می دهد که حتی اگر $i_s = 0$ باشد گشتاور می تواند تولید شود زیرا L_r تابع موقعیت روتور است . بنابراین گشتاوری که عبارت (۲-۶۴) تعیین می کند گشتاور مقاومت مغناطیسی نامیده می شود . سپس در شکل (۲-۲۱) گشتاور مقاومت مغناطیسی بر اثر عملکرد هر کدام از جریانها به تنهایی ، وجود دارد . همچنین توجه فیزیکی تولید گشتاور مقاومت مغناطیسی در شکل (۲-۲۱) مهم است .

اگر فقط استاتور تحریک شود ، شار استاتور تمایل دارد که مسیری با کمترین مقاومت مغناطیسی بدست آورد و برای این منظور روتور در خلاف جهت عقربه های ساعت

می چرخد. و اگر فقط روتور تحریک شود، شار روتور تمایل دارد که مسیری با کمترین مقاومت مغناطیسی بدست آورد و برای این منظور روتور در خلاف جهت عقربه های ساعت می چرخد. در شکل (۲-۲۱) فرض کنید که روتور قطب برجسته با روتور استوانه ای جایگزین شود و سیستم توسط جریان i_r مثل حالت قبل تحریک شود. در اینصورت از رابطه (۲-۶۰) عبارت گشتاور برابر است با:

$$T_c = \frac{1}{\mu} i_r^2 \frac{dL_r}{d\theta_r} + i_s i_r \frac{dM_{sr}}{d\theta_r} \quad (2-65)$$

در رابطه فوق مولفه $\frac{1}{\mu} i_r^2 \frac{dL_s}{d\theta_r}$ وجود ندارد. زیرا در اینحالت شار استاتور مقاومت مغناطیسی \mathcal{R}_s را می بیند و این مقاومت مغناطیسی با حرکت روتور تغییر نمی کند. بنابراین L_s ثابت می ماند و $\frac{dL_s}{d\theta_r} i_r$ صفر است.

دو جمله اول معادله (۲-۶۰) که حاوی تغییر زاویه ای ضرایب القاء L_r و L_s اند گشتاور مقاومت مغناطیسی ساختار شکل (۲-۲۱) را تشکیل می دهند. جمله آخر یعنی $i_s i_r \frac{dM_{sr}}{d\theta_r}$ مولفه ای از گشتاور است که به جریانهای سیم پیچ های استاتور و روتور و نیز به نرخ تغییرات ضریب القاء متقابل M_{sr} نسبت به زاویه، بستگی دارد.

این مولفه معمولاً "گشتاور الکترومغناطیسی دستگاههای مبدل انرژی الکترومغناطیسی نامیده می شود.

بررسی عبارت $i_s i_r \frac{dM_{sr}}{d\theta_r}$ نشان می دهد که گشتاور الکترومغناطیسی فقط در صورتی وجود دارد که:

الف) دو سیم پیچ استاتور و روتور تزویج متقابل داشته باشند.

ب) هر دو سیم پیچ جریان داشته باشند.

تولید گشتاور الکترومغناطیسی در شکل (۲-۲۱) بصورت زیر توجیه می شود:

i_s قطبهای شمال و جنوب مغناطیسی در استاتور ایجاد می کند. همین طور i_r نیز قطبهای شمال و جنوب مغناطیسی در روتور ایجاد می کند. این قطبها یکدیگر را جذب می کنند و موجب هم امتداد شدن میدانها می شوند. گشتاوری که بر اثر عمل متقابل میدانهای مغناطیسی استاتور و روتور تولید می شود را گشتاور الکترومغناطیسی یا گشتاور تداخلی می نامند. توجه کنید که گشتاور مقاومت مغناطیسی $(\frac{1}{\mu} i_s^2 \frac{dL_s}{d\theta_r})$ یا $(\frac{1}{\mu} i_r^2 \frac{dL_r}{d\theta_r})$ به جهت جریان در سیم پیچ های استاتور و روتور بستگی ندارد. اما گشتاور تداخلی $(i_s i_r \frac{dM_{sr}}{d\theta_r})$ به

جهت جریانهای i_s و i_r وابسته است. مثلاً اگر در شکل (۲-۲۱) جهت جریان i_r عوض شود، گشتاور تداخلی در خلاف جهتی که در شکل (۲-۲۱) نشان داده شده است عمل می کند اما گشتاور مقاومت مغناطیسی در همان جهت قبل ظاهر می شود.

۲-۵ ماشینهای سنکرون مقدماتی

در این قسمت با توجه به انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی عبارات گشتاور مربوط به یک ماشین سنکرون ابتدایی را بدست می آوریم.

الف) ماشینهای تکفاز با روتور استوانه ای :

شکل اساسی ماشینهای سنکرون تک فاز مقدماتی با روتور استوانه ای در شکل (a) ۲-۲۳ نشان داده شده است.

با اتصال یک منبع تکفاز به سیم پیچ استاتور و یک ولت متر به دو سر سیم پیچ روتور می توان تغییرات ضریب القاء متقابل استاتور روتور M_{sr} را تعیین کرد. وقتی $\theta_r = 0$ باشد شار دربرگیرنده با روتور ماکزیمم است که این مطلب با قرائت ماکزیمم ولت متر تأیید می شود. بنابراین در این حالت ضریب القاء متقابل بین استاتور و روتور ماکزیمم است. یعنی :

$$M_{sr} = M_{max} \quad \text{برای } \theta_r = 0$$

وقتی $\theta_r = \frac{\pi}{4}$ است، محور سیم پیچ استاتور بر محور سیم پیچ روتور عمود است به همین دلیل ولت متر عدد صفر را نشان می دهد. لذا وقتی $\theta_r = \frac{\pi}{4}$ است M_{sr} صفر است. وقتی $\theta_r = \pi$ است شار دربرگیرنده روتور ماکزیمم معکوس است. در نتیجه جهت emf القا شده هم عوض می شود و ضریب القاء متقابل با علامت منفی ماکزیمم مقدار است.

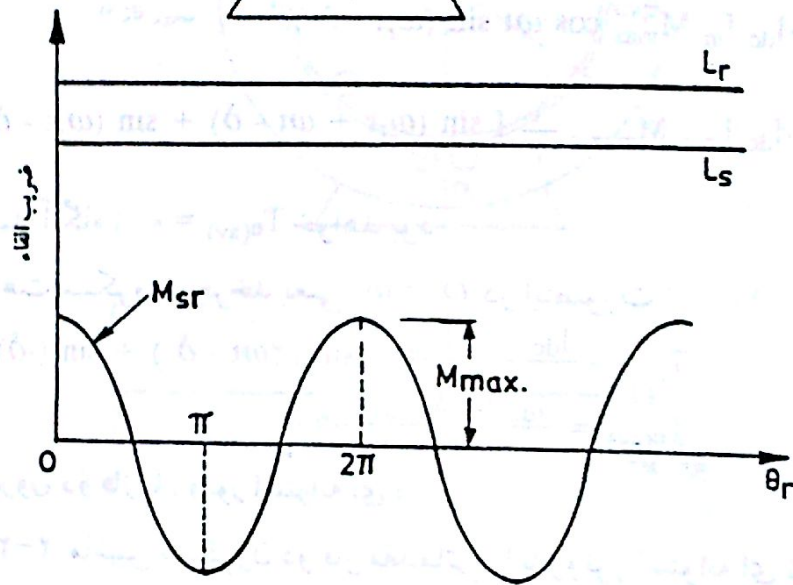
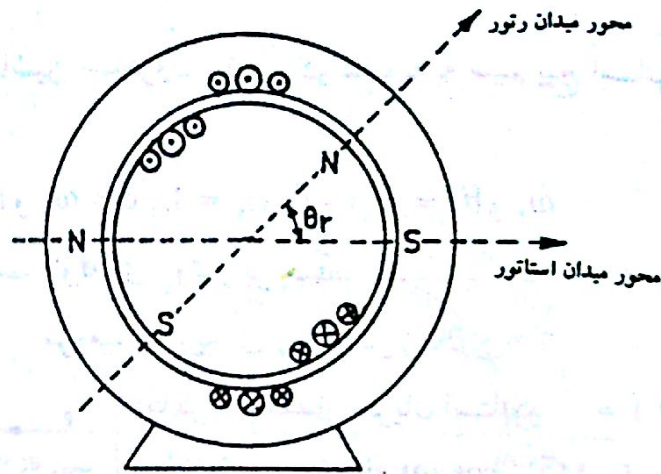
$$M_{sr} = -M_{max} \quad \text{برای } \theta_r = \pi$$

فرض می کنیم تغییرات M_{sr} از $\theta_r = 0$ تا $\theta_r = \pi$ تابع کسینوسی از θ_r باشد. این موضوع در شکل (b) ۲-۲۳ نشان داده شده است.

چون مقاومت مغناطیسی که شار استاتور می بیند به حرکت روتور بستگی ندارد L_s ثابت است. و به همین دلیل L_r نیز ثابت است. در ضمن شکل (b) ۲-۲۳ نشان می دهد که رابطه ضریب القاء متقابل M_{sr} با زاویه θ_r بصورت :

$$M_{sr} = M_{max} \sin \theta_r$$

است. در اینجا θ_r زاویه فضایی بین محورهای میدانهای استاتور و روتور است.



شکل ۲۳-۲ (a) ماشینهای تکفاز سنکرون با روتور استوانه ای (b) تغییرات ولتاژ القا شده با زاویه فضایی θ_r فرض کنید که جریانهای لحظه ای استاتور و روتور به ترتیب برابر با i_s و i_r باشند در اینصورت:

$$W_{fld}(i_s, i_r, \theta_r) = \frac{1}{2} i_s^2 L_s + \frac{1}{2} i_r^2 L_r + i_s i_r M_{sr}$$

$$= \frac{1}{2} i_s^2 L_s + \frac{1}{2} i_r^2 L_r + i_s i_r M_{max} \cos \theta_r$$

$$T_e = \frac{\delta W_{fld}}{\delta \theta_r} (i_s, i_r, \theta_r)$$

$$= 0 + 0 - i_s i_r M_{max} \sin \theta_r$$

$$= -i_s i_r M_{max} \sin \theta_r$$

علامت منفی نشان می دهد که گشتاور T_e در جهت کاهش زاویه θ_r عمل می کند. این عبارت گشتاور هم برای وقتی که روتور ساکن است و هم برای وقتی که روتور می چرخد

صادق است. در یک ماشین سنکرون، تحریک dc، یا به سیم پیچ استاتور و یا به سیم پیچ روتور اعمال می شود.

فرض کنید که: $i_s = I_m \cos \omega t$ و $i_r = I_{dc}$ و $\theta_r = \omega_r t - \delta$

$\omega_r =$ سرعت زاویه ای روتور بر حسب رادیان بر ثانیه

$\delta =$ موقعیت زاویه ای روتور در زمان $t = 0$

$I_m = \sqrt{2} I =$ ماکزیمم مقدار جریان استاتور

$$\therefore T_e = -I_{dc} I_m M_{max} \cos \omega t \sin (\omega_r t - \delta)$$

$$= -I_{dc} I_m \cdot M_{max} \cdot \frac{1}{2} [\sin (\omega_r t + \omega t - \delta) + \sin (\omega_r t - \delta - \omega t)]$$

اگر $\omega_r \neq \omega$ باشد آنگاه: $T_{e(av)} = 0$ خواهد بود.

اگر روتور با سرعت سنکرون بچرخد یعنی $\omega_r = \omega$ در اینصورت:

$$T_e = -\frac{I_{dc} I_m M_{max}}{2} [\sin (2\omega t - \delta) + \sin (-\delta)]$$

$$\therefore T_{e(av)} = \frac{I_{dc} I_m M_{max}}{2} \sin \delta \quad (2-66)$$

ب) ماشین سنکرون دو فاز با روتور استوانه ای:

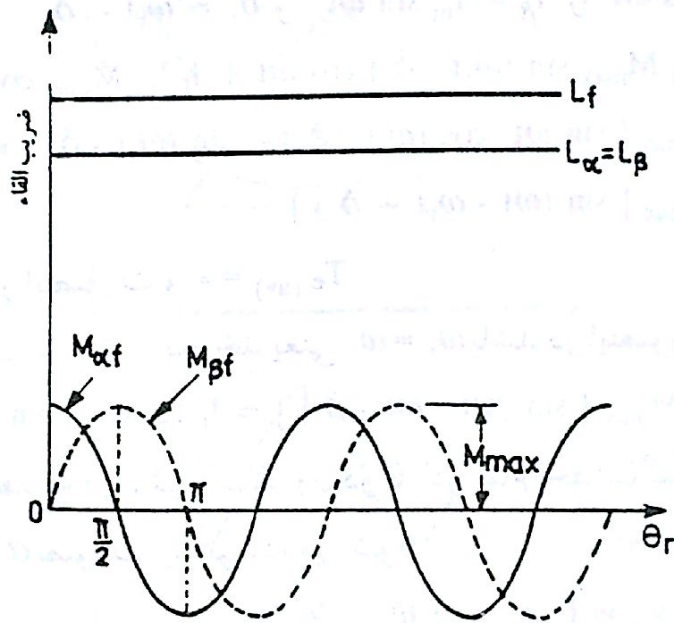
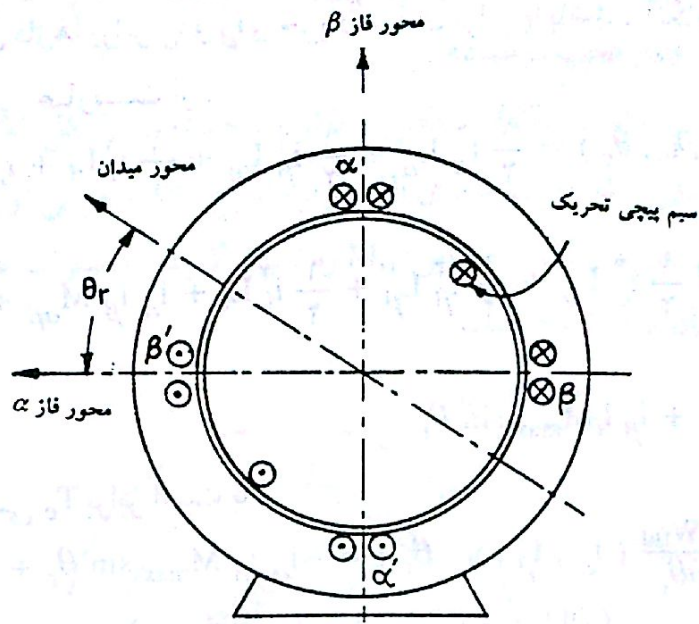
شکل (a) ۲-۲۴ ماشین سنکرون دو فاز مقدماتی را با روتور استوانه ای نشان می دهد که در آن محور سیم پیچ های دو فاز آرمیچر با α و β مشخص شده اند. همچنین زاویه فضایی θ_r زاویه بین محور سیم پیچ میدان و محور فاز α است.

با اتصال یک منبع تکفاز به سیم پیچ روتور و نیز اتصال دو ولت متر به سیم پیچ های استاتور می توان تغییرات $M_{\alpha f}$ و $M_{\beta f}$ که به ترتیب برابر ضرایب القاء متقابل بین سیم پیچ تحریک روتور با فازهای α و β استاتور می باشند، را تعیین کرد. وقتی $\theta_r = 0$ است شار دربرگیرنده متقابل با فاز α ماکزیمم است اما شار دربرگیرنده متقابل با فاز β صفر است. به همین دلیل قرائت ولت متر فاز α ماکزیمم و قرائت ولت متر فاز β صفر است.

بنابراین وقتی $\theta_r = 0$ باشد $M_{\beta f} = 0$ و $M_{\alpha f} = M_{max}$ است. و وقتی $\theta_r = \frac{\pi}{2}$ باشد می توان نشان داد که $M_{\alpha f} = 0$ و $M_{\beta f} = M_{max}$ است. همچنین وقتی $\theta_r = \pi$ باشد می توان نشان داد

$$M_{\alpha f} = -M_{max} \text{ و } M_{\beta f} = 0 \quad \text{شکل (b) ۲-۲۴}$$

مقاومت مغناطیسی که شار سیم پیچ های فاز α و β می بینند با حرکت روتور تغییر نمی کند. بنابراین ضرایب خودالقاهای α و β یعنی L_α و L_β ثابتند و با یکدیگر



شکل ۲۴-۲: (a) ماشین سنکرون دو فاز با روتور استوانه ای

(b) تغییرات ضریب القاء با زاویه فضایی θ_r

مساوی هستند. بطور مشابه ضریب خود القاء سیم پیچ میدان L_f هم ثابت است. و چون محورهای سیم پیچ های فاز α و β عمود بر یکدیگر هستند و فاصله هوایی یکنواخت است، پس ضریب القاء متقابل بین سیم پیچ های α و β یعنی $M_{\alpha\beta}$ صفر است. از شکل (b) ۲۳-۲:

$$M_{\alpha f} = M_{\max} \cos \theta_r$$

$$M_{\beta f} = M_{\max} \sin \theta_r$$

با فرض اینکه جریانهای فازها برابر i_α و i_β و جریان میدان برابر i_f باشد، آنگاه انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی عبارتست از:

$$W_{fld}(i_\alpha, i_\beta, i_f, \theta_r) = \frac{1}{2} i_\alpha^2 L_\alpha + \frac{1}{2} i_\beta^2 L_\beta + \frac{1}{2} i_f^2 L_f + i_\alpha i_\beta M_{\alpha\beta} + i_\alpha i_f M_{\alpha f} + i_\beta i_f M_{\beta f}$$

$$= \frac{1}{2} i_\alpha^2 L_\alpha + \frac{1}{2} i_\beta^2 L_\beta + \frac{1}{2} i_f^2 L_f + i_\alpha i_\beta M_{\alpha\beta} + i_\alpha i_f M_{\max} \cos \theta_r + i_\beta i_f M_{\max} \sin \theta_r$$

گشتاور الکترومغناطیسی T_e برابر است با:

$$T_e = \frac{\partial W_{fld}}{\partial \theta_r}(i_\alpha, i_\beta, i_f, \theta_r) = -i_\alpha i_\beta M_{\max} \sin \theta_r + i_\beta i_f M_{\max} \cos \theta_r$$

$i_f = I_f$ (جریان مستقیم در سیم پیچ میدان)

$$i_\alpha = I_m \cos \omega t \quad \text{و} \quad i_\beta = I_m \sin \omega t \quad \text{و} \quad \theta_r = \omega_r t - \delta$$

$$\begin{aligned} \therefore T_e &= -I_f I_m M_{\max} \sin(\omega_r t - \delta) \cos \omega t + I_f I_m M_{\max} \cos(\omega_r t - \delta) \sin \omega t \\ &= I_f I_m M_{\max} [\sin \omega t \cos(\omega_r t - \delta) - \sin(\omega_r t - \delta) \cos \omega t] \\ &= I_f I_m M_{\max} [\sin(\omega t - \omega_r t + \delta)] \end{aligned} \quad (۲-۶۷)$$

اگر $\omega_r \neq \omega$ باشد در اینصورت، $T_{e(av)} = 0$

و اگر روتور با سرعت سنکرون بچرخد یعنی $\omega_r = \omega$ باشد در اینصورت:

$$\therefore T_e = I_f I_m M_{\max} [\sin(\omega t - \omega t - \delta)] = I_f I_m M_{\max} \sin \delta \quad (۲-۶۸)$$

این رابطه نشان می دهد که در ماشین سنکرون دو فاز در تمام لحظات گشتاور T_e ثابت است. رابطه ولتاژ برای فاز α بصورت زیر نوشته می شود:

$$v_\alpha = i_\alpha r_\alpha + p \psi_\alpha$$

اما:

$$\psi_\alpha = L_\alpha i_\alpha + M_{\alpha f} I_f = L_\alpha I_m \cos \omega t + M_{\max} I_f \cos(\omega t - \delta)$$

$$\therefore v_\alpha = r_\alpha \sqrt{2} I \cos \omega t - \omega L_\alpha I_m \sin \omega t - \omega M_{\max} I_f \sin(\omega t - \delta)$$

برای فاز β :

$$v_\beta = i_\beta r_\beta + p \psi_\beta$$

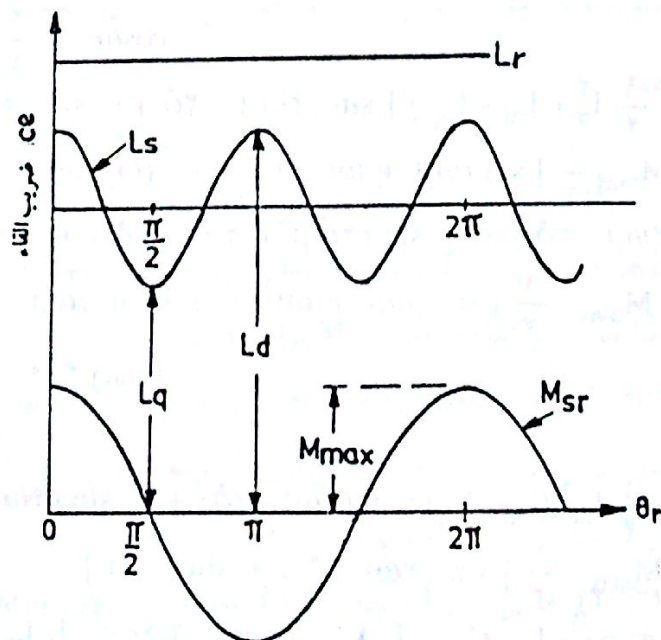
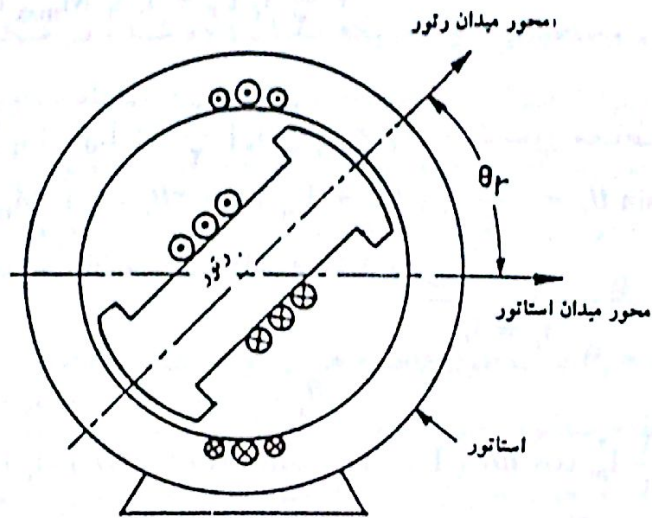
اما:

$$\psi_\beta = L_\beta i_\beta + M_{\alpha\beta} I_f = L_\beta I_m \sin \omega t + M_{\max} I_f \sin(\omega t - \delta)$$

$$v_{\beta} = r_{\beta} \sqrt{2} I \sin \omega t + \omega L_{\beta} I_m \cos \omega t + \omega M_{\max} I_f \cos(\omega t - \delta)$$

(ج) ماشینهای تکفاز قطب برجسته :

شکل ابتدایی ماشین تکفاز سنکرون قطب برجسته در شکل (a) ۲-۲۵ نشان داده شده است. بهمان نحوی که در قسمتهای الف و ب شرح داده شد می توان تغییرات ضرایب خود القاء L_s و L_r و ضریب القاء متقابل M_{sr} را تعیین کرد. تغییرات ضرایب القاء در شکل (b) ۲-۲۵ نشان داده شده است.



شکل ۲-۲۵: (a) ماشین سنکرون تکفاز قطب برجسته

(b) تغییرات ضرایب القاء با زاویه فضایی θ_r

رابطه تغییرات ضرایب القاء بر حسب زاویه فضایی θ_r بصورت‌های زیر بیان می‌شود:

$$L_r = \text{مقدار ثابت} = \text{ضریب خود القاء خودی روتور}$$

$$L_s = \text{ضریب خود القاء استاتور} = \frac{1}{4} (L_d + L_q) + \frac{1}{4} (L_q - L_d) \cos 2\theta_r$$

$$M_{sr} = \text{ضریب خود القاء متقابل} = M_{\max} \cos \theta_r$$

$$W_{fld}(i_s, i_r, \theta_r) = \frac{1}{4} i_s^2 \left[\frac{1}{4} (L_d + L_q) + \frac{1}{4} (L_d - L_q) \cos 2\theta_r \right] + \frac{1}{4} i_r^2 L_r + i_s i_r M_{\max} \cos \theta_r$$

$$T_e = \text{گشتاور مغناطیسی لحظه‌ای} = -\frac{1}{4} i_s^2 \left[\frac{1}{4} \cdot 2 (L_d - L_q) \sin 2\theta_r \right]$$

$$i_s i_r M_{\max} \sin \theta_r = -\frac{1}{4} i_s^2 (L_d + L_q) \sin 2\theta_r - i_s i_r M_{\max} \sin \theta_r$$

در اینجا سیم پیچ روتور باید جریان مستقیم داشته باشد یعنی:

$$i_r = i_f$$

$$\theta_r = \omega_r t - \delta \quad \text{و} \quad i_s = I_m \cos \omega t$$

$$\therefore T_e = \frac{1}{4} I_m^2 \cos^2 \omega t (L_d - L_q) \sin (2\omega_r t - 2\delta) - I_f I_m \cos \omega t M_{\max} \sin (\omega_r t - \delta)$$

$$\text{حال: } \cos^2 \omega t = \frac{1}{4} (1 + \cos 2\omega t)$$

$$\begin{aligned} \therefore T_e &= -\frac{1}{4} I_m^2 (L_d - L_q) [\sin (2\omega_r t - 2\delta) + \sin (2\omega_r t - 2\delta) \cos 2\omega t] \\ &- I_f I_m M_{\max} \frac{1}{4} [\sin (\omega_r t + \omega t - \delta) + \sin (\omega_r t - \omega t - \delta)] = -\frac{1}{4} I_m^2 (L_d - L_q) \\ &[\sin (2\omega_r t - 2\delta) + \frac{1}{4} \sin (2\omega_r t + 2\omega t - 2\delta) + \frac{1}{4} \sin (2\omega_r t - 2\omega t - 2\delta)] \\ &- I_f I_m M_{\max} \cdot \frac{1}{4} [\sin (\omega_r t + \omega t - \delta) + \sin (\omega_r t - \omega t - \delta)] \end{aligned}$$

$$T_{e(av)} = 0 \quad \text{برای } \omega_r \neq \omega \text{ داریم:}$$

اگر $\omega_r = \omega$ باشد آنگاه:

$$T_e = -\frac{1}{4} I_m^2 (L_d - L_q) [\sin (2\omega t - 2\delta) + \frac{1}{4} \sin (4\omega t - 2\delta) + \frac{1}{4} \sin (-2\delta)] - I_f I_m M_{\max} \cdot \frac{1}{4} [\sin (2\omega t - \delta) + \sin (-\delta)]$$

$$\begin{aligned} \therefore T_{e(av)} &= -\frac{1}{4} I_m^2 (L_d - L_q) \left[\frac{1}{4} \sin (-2\delta) + -I_f I_m M_{\max} \cdot \frac{1}{4} [\sin (-\delta)] \right] \\ &= \frac{1}{8} I_m^2 (L_d - L_q) \sin 2\delta + \frac{1}{4} I_f I_m M_{\max} \sin \delta \end{aligned} \quad (2-69)$$

اگر جریان میدان I_f به صفر تقلیل داده شود آنگاه:

$$T_{e(av)} = \frac{1}{8} I_m^2 (L_d - L_q) \sin 2\delta \quad (۲-۷۰)$$

این رابطه، گشتاور مقاومت مغناطیسی ماشین سنکرون قطب برجسته را بیان می کند. مولفه دیگر گشتاور یعنی: $\frac{1}{4} I_f I_m M_{max} \sin \delta$ گشتاور الکترومغناطیسی یا گشتاور تداخلی ماشین سنکرون قطب برجسته می باشد.

مثال ۲.۱۰

برای سیستم مغناطیسی دو تحریکه نشان داده شده در شکل (۲-۲۱)، مطلوبست تعیین نمایش تغییرات ضرایب القاء بر حسب وضعیت مختلف زاویه ای روتور. حل: تغییرات ضریب القاء متقابل M_{sr} با زاویه موقعیت روتور را می توان بهمان طریقی که در قسمت (۲-۵ الف) شرح داده شده است بدست آورد. فرض کنید تغییرات ضریب القاء با زاویه فضایی θ_r سینوسی باشد.

۱- وقتی $\theta_r = 0$ است طول فاصله هوایی و در نتیجه مقاومت مغناطیسی مینیمم است و ضریب خود القاء استاتور یعنی $L_s (= \frac{N_s^2}{\mathcal{R}})$ و ضریب خود القاء روتور یعنی $L_r (= \frac{N_r^2}{\mathcal{R}})$ ماکزیمم هستند. و چون به ازای $\theta_r = 0$ محورهای مغناطیسی سیم پیچ های استاتور و روتور بر هم منطبق هستند، لذا مقدار ضریب القاء متقابل نیز ماکزیمم بوده و فرض کنید مقدار آن مثبت باشد یعنی:

$$M_{sr} = + M_{max}$$

۲- وقتی $\theta_r = \frac{\pi}{2}$ است طول فاصله هوایی و در نتیجه مقاومت مغناطیسی ماکزیمم است. بنابراین L_s و L_r هر دو مینیمم هستند (اما منفی نیستند) و چون محورهای استاتور و روتور بر هم عمودند لذا ضریب القاء متقابل M_{sr} برابر صفر است.

۳- وقتی $\theta_r = \pi$ است، طول فاصله هوایی دوباره مینیمم است و بنابراین L_s و L_r ماکزیمم هستند. ضریب القاء متقابل این بار ماکزیمم منفی است یعنی: $M_{sr} = -M_{max}$ (مشابه آنچه در قسمت (۲-۵ الف) شرح داده شد.)

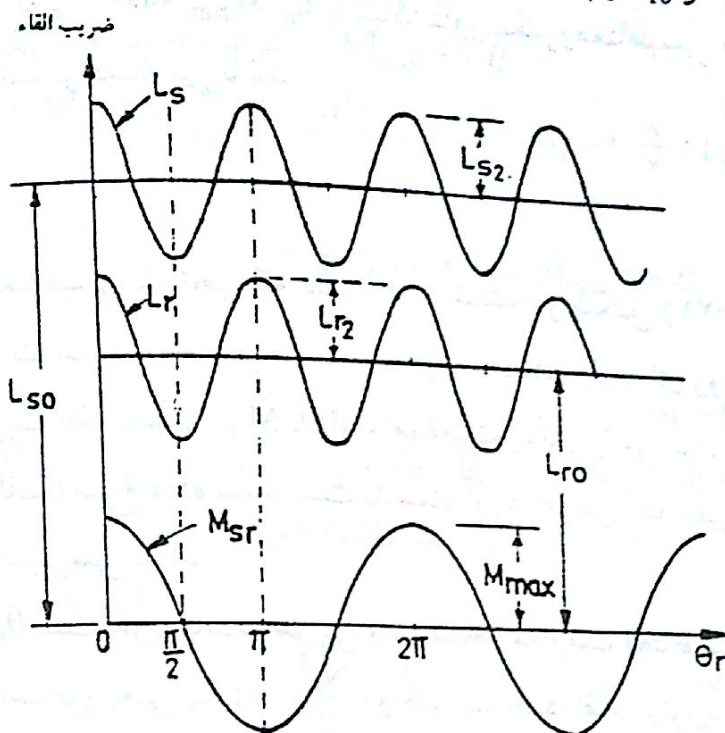
در شکل (۲-۲۶) تغییرات L_s و L_r و M_{sr} نسبت به تغییرات موقعیت زاویه ای روتور θ_r نشان داده شده است. روابط L_s و L_r و M_{sr} عبارتند از:

$$L_s = L_{s0} + L_{sr} \cos 2\theta_r$$

$$L_r = L_{r0} + L_{rr} \cos 2\theta_r$$

$$M_{sr} = M_{max} \cos \theta_r$$

در اینجا L_{s0} و L_{s2} و L_{r0} و L_{r2} در شکل (۲-۲۶) مشخص شده اند.



شکل ۲-۲۶: تغییرات ضرایب القاء سیستم شکل ۲-۲۱ مثال (۲-۱۰)

مثال ۲.۱۱

مقادیر ضرایب خود القاء و القاء متقابل سیستم مغناطیسی دو تحریکه شکل (۲-۲۱)

بصورت زیر است.

$$L_s = 0.6 + 0.2 \cos 2\theta_r \text{ H}$$

$$L_r = 0.75 + 0.3 \cos 2\theta_r \text{ H}$$

$$M_{sr} = 0.8 \cos \theta_r \text{ H}$$

مقاومت سیم بیچ قابل اغماض است.

الف) اگر موقعیت زاویه ای روتور $\theta_r = 60^\circ$ باشد و روتور در این موقعیت ساکن بماند، و وقتی که مطابق شکل (۲-۲۱) به ترتیب جریانهای زیر در جهت نشان داده شده برقرار باشد مقدار و جهت گشتاور را بدست آورید.

۱- جریان مستقیم $i_r = 10 \text{ A}$ و جریان مستقیم $i_s = 20 \text{ A}$

۲- جریان مستقیم $i_r = -10 \text{ A}$ و جریان مستقیم $i_s = 20 \text{ A}$

۳- $i_r = 0 \text{ A}$ و جریان مستقیم $i_s = 20 \text{ A}$

ب) اگر روتور در موقعیت زاویه ای $\theta_r = 60^\circ$ ساکن باشد و سیم پیچ روتور اتصال کوتاه شده ولیکن جریانی سینوسی با مقدار موثر (r.m.s) 20^A در سیم پیچ استاتور برقرار باشد، مقدار و جهت گشتاور را بدست آورید.

ج) اگر ولتاژ اعمال شده به سیم پیچ استاتور سینوسی با مقدار موثر 314^V (r.m.s) و فرکانس 50 Hz باشد، قسمت (ب) را تکرار کنید.

د) روابط ولتاژ استاتور و روتور را برای مقادیر جریانی که در قسمت (الف - ۱) داده شده است پیدا کنید. فقط برای این قسمت سرعت روتور را 20 رادیان بر ثانیه فرض کنید.

حل :

مقادیر L_s و L_r و M_{sr} و مشتقات آنها بر حسب θ_r ، به ازای $\theta_r = 60^\circ$ برابرند با :

$$L_s = 0.6 + 0.2 \cos 120^\circ = 0.5 \text{ H}$$

$$L_r = 0.75 + 0.3 \cos 120^\circ = 0.6 \text{ H}$$

$$M_{sr} = 0.8 \cos 60^\circ = 0.4 \text{ H}$$

$$\frac{dL_s}{d\theta_r} = -2 \times 0.2 \sin 2 \times 60^\circ = -0.3464$$

$$\frac{dL_r}{d\theta_r} = -(0.3)(2) \sin 120^\circ = -0.52$$

$$\frac{dM_{sr}}{d\theta_r} = -0.8 \sin 60^\circ = -0.693$$

الف :

۱- از رابطه (۲-۶۰) داریم :

$$T_e = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_s}{d\theta_r} + \frac{1}{2} i_r^2 \frac{dL_r}{d\theta_r} + i_s i_r \frac{dM_{sr}}{d\theta_r}$$

با جایگذاری مقادیر عددی خواهیم داشت :

$$T_e = \frac{1}{2} (20)^2 (-0.3464) + \frac{1}{2} (10)^2 (-0.52) + (20)(10)(-0.693) = -233/88 \text{ N.m}$$

چون گشتاور منفی است پس در جهت کاهش θ_r عمل می کند یعنی مخالف جهت چرخشی

عقربه های ساعت که در شکل (۲-۲۱) مشخص شده است.

$$T_e = \frac{1}{2} (20)^2 (-0.3464) + \frac{1}{2} (-10)^2 (-0.52) + (20)(-10)(-0.693) \quad (2)$$

$$= -69/28 - 26 + 138/6 = 43/32 \text{ N.m}$$

چون گشتاور مثبت است از اینرو در جهت چرخش عقربه های ساعت عمل می کند.
 (۳) خلاف جهت چرخش عقربه های ساعت: $T_e = \frac{1}{\gamma} (20)^2 (-0/3464) = -69/28 \text{ N.m}$

ب) برای مدار روتور:

$$v_r = r_r i_r + \frac{d\psi_r}{dt}$$

و چون سیم پیچ روتور اتصال کوتاه شده است لذا: $v_r = 0$

$$0 = 0 + \frac{d\psi_r}{dt}$$

اما:

$$\psi_r = L_r i_r + M_{sr} i_s$$

$$\frac{d}{dt} (\psi_r) = \frac{d}{dt} (L_r i_r + M_{sr} i_s) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (L_r i_r) = - \frac{d}{dt} (M_{sr} i_s)$$

$$L_r i_r = - M_{sr} i_s$$

$$i_r = - \frac{M_{sr}}{L_r} i_s$$

(۲-۷۱)

داریم:

$$i_s = \sqrt{2} (20) \sin \omega t$$

پس:

$$i_r = - \frac{M_{sr}}{L_r} \sqrt{2} (20) \sin \omega t = - \frac{0/4}{0/6} (\sqrt{2}) (20) \sin \omega t$$

$$= - \frac{40}{3} \sqrt{2} \sin \omega t$$

با جایگذاری مقادیر در رابطه (۲-۶۰) داریم:

$$T_e = \frac{1}{\gamma} (20 \sqrt{2} \sin \omega t)^2 (-0/3464) + \frac{1}{\gamma} \left(- \frac{40 \sqrt{2}}{3} \sin \omega t \right)^2 (-0/52) \\ + (20 \sqrt{2}) \left(- \frac{40 \sqrt{2}}{3} \right) (-0/693) \sin^2 \omega t = [-138/56 - 92/45 + 369/60] \\ \times \sin^2 \omega t = 138/59 \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right)$$

$$T_{e(av)} = 69/295 \text{ N.m}$$

خلاف جهت چرخش عقربه های ساعت

ج) ولتاژ اعمالی به سیم پیچ استاتور:

$$v_s = (\sqrt{2}) 314 \sin \omega t$$

اما:

$$v_s = r_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt} \approx \frac{d\psi_s}{dt}$$

همچنین:

$$\psi_n = L_n i_n + M_{nr} i_r$$

یا جایگذاری از رابطه (۲-۷۱) خواهیم داشت:

$$\psi_n = L_n i_n - \frac{M_{nr}}{L_r} i_n = \left(L_n - \frac{M_{nr}}{L_r} \right) i_n = L'_s i_s$$

L'_s را ضریب القاء اتصال کوتاه سیم پیچ استاتور می نامیم:

$$\therefore L'_s = \left(L_n - \frac{M_{nr}}{L_r} \right) = \left[0.5 - \frac{(0.4)^2}{0.6} \right] = 0.23 \text{ H}$$

$$\therefore v_s = \frac{d\psi_n}{dt} = \frac{d}{dt} (i_n L'_s) = 314 \sqrt{2} \sin \omega t$$

یا:

$$i_n L'_s = \frac{314 \sqrt{2}}{\omega} \cos \omega t = -\frac{314 \sqrt{2}}{314} \cos 314 t = -\sqrt{2} \cos 314 t$$

$$\therefore i_n = -\frac{1/\sqrt{2}}{0.23} \cos 314 t = -6/15 \cos 314 t$$

از رابطه (۲-۷۱)

$$i_r = \frac{M_{nr}}{L_r} i_n = \frac{0.4}{0.6} (6/15) \cos 314 t = 4/1 \cos 314 t$$

برای $\theta_r = 60^\circ$:

$$T_e = \frac{1}{\gamma} (-6/15 \cos 314 t)^2 (-0.3464) + \frac{1}{\gamma} (4/1 \cos 314 t)^2 (-0.52)$$

$$+ (-6/15 \cos 314 t) (4/1 \cos 314 t) (-0.693) = -6/55 \cos^2 314 t$$

$$-4/37 \cos^2 314 t + 17/48 \cos^2 314 t = 6/56 \cos^2 314 t = 6/56 \left(\frac{1 + \cos 628 t}{2} \right)$$

$$\therefore T_{e(av)} = \frac{6/56}{2} = 3/28 \text{ N.m} \text{ در خلاف جهت چرخش عقربه های ساعت}$$

(د) معادلات ولتاژهای روتور و استاتور عبارتند از:

$$v_s = r_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt}$$

$$v_r = r_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt}$$

$$\psi_s = L_s i_s + M_{sr} i_r = (0.06 + 0.02 \cos 2\theta_r)(20) + (0.08 \cos \theta_r) 10 = 12 + 4 \cos 2\theta_r + 8 \cos \theta_r$$

$$\psi_r = L_r i_r + M_{sr} i_s = (0.075 + 0.03 \cos 2\theta_r)(10) + (0.08 \cos \theta_r)(20) = 7.5 + 3 \cos 2\theta_r + 16 \cos \theta_r$$

رابطه ولتاژ استاتور:

$$v_s = 0 + \frac{d}{dt} (12 + 4 \cos 2\theta_r + 8 \cos \theta_r) =$$

$$= -4 (\sin 2\theta_r) 2 \frac{d\theta_r}{dt} - 8 \sin \theta_r \frac{d\theta_r}{dt}$$

$$\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r = 20 \text{ رادیان / ثانیه}$$

$$\therefore v_s = -160 \sin 2\theta_r - 160 \sin \theta_r = -160 (\sin \theta_r + \sin 2\theta_r)$$

رابطه ولتاژ روتور:

$$v_r = 0 + \frac{d}{dt} (7.5 + 3 \cos 2\theta_r + 16 \cos \theta_r) = - (3 \sin 2\theta_r) \times 2 \times 20$$

$$- (16 \sin \theta_r) 20 = -120 \sin 2\theta_r - 320 \sin \theta_r = -40 (8 \sin \theta_r + 3 \sin 2\theta_r)$$

مثال ۲.۱۲

دستگاه اندازه گیری با قاب گردان را می توان مانند شکل (۲۷-۲) با دو سیم پیچ جایگزین کرد. ضرایب خود القاء و القاء متقابل این دو سیم پیچ مقادیر زیر را دارند:

$$L_1 = 0.02 \text{ mH}$$

$$L_2 = 0.015 \text{ mH}$$

$$M_{12} = 0.008 \sin \theta \text{ mH}$$

سیم پیچ های ساکن و متحرک با هم سری شده اند و جریان $I_m \sin \omega t$ از آنها عبور می کند. فنر حلزونی بازدارنده (مقاوم) گشتاور کنترلی ایجاد می کند که مقدار آن متناسب با میزان انحراف زاویه θ است و در $\theta = 90^\circ$ مقدار آن 0.144 N.m است.

الف) عبارتی بر حسب موقعیت زاویه ای θ برای گشتاور بدست آورید.

- (ب) گشتاور متوسط را بر حسب θ بدست آورید.
 (ج) تغییرات گشتاور متوسط را بر حسب θ برای جریانهای 15^A و 10 و $5 = I$ بدست آورید.
 (د) منحنی تغییرات جریان بر حسب θ را رسم کنید.
 (ه) اگر ماکزیمم جریان لحظه ای 15 آمپر باشد محدوده انحراف عقربه (نشانگر) چقدر است؟

حل: الف) گشتاور مغناطیسی:

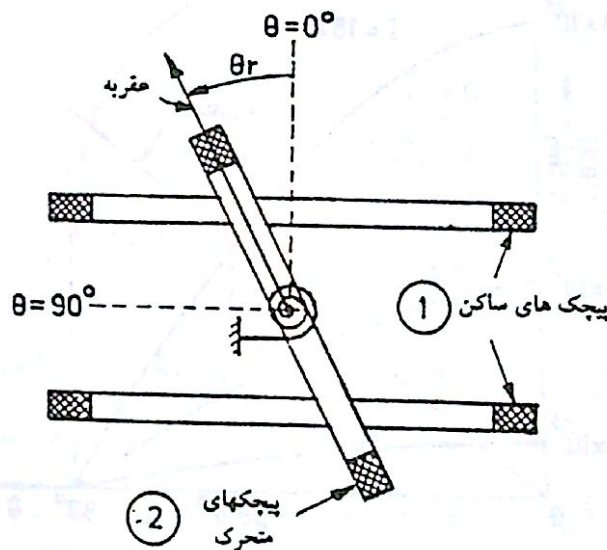
$$T_e = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dM_{12}}{d\theta}$$

$$i_1 = i_2 = I_m \sin \omega t$$

و چون دو سیم پیچ سری هستند:

$$\therefore T_e = 0 + 0 + (I_m \sin \omega t)^2 \frac{d}{d\theta} (0.08 \sin \theta) 10^{-3}$$

$$= 0.08 \times 10^{-4} \times I_m^2 \sin^2 \omega t \cos \theta \text{ N.m}$$



شکل ۲-۲۷: دستگاه اندازه گیری باسیم پیچ گردان

$$T_e = 0.08 \times 10^{-4} I_m^2 \left(\frac{1 - \cos \omega t}{2} \right) \cos \theta \quad (\text{ب})$$

$$\therefore T_{e(av)} = 0.04 \times 10^{-4} I_m^2 \cos \theta \text{ N.m}$$

(ج)

$$I = 5 \text{ A(rms)} \Rightarrow T_{e(av)} = (0.04 \times 10^{-4}) (\sqrt{2} \times 5)^2 \cos \theta = 2 \times 10^{-3} \cos \theta \text{ N.m}$$

$$I = 10 \text{ A(rms)} \Rightarrow T_{e(av)} = 8 \times 10^{-3} \cos \theta \text{ N.m}$$

$$I = 15 \text{ A(rms)} \Rightarrow T_{e(av)} = 18 \times 10^{-3} \cos \theta \text{ N.m}$$

در شکل (a) ۲-۲۸ تغییر $T_{e(av)}$ نسبت به تغییر θ نشان داده شده است.

(د) فرض کنیم ثابت فنر K_s باشد پس برای انحراف 90° داریم:

$$K_s \cdot (90^\circ) = 0.0144 \text{ N.m}$$

$$\therefore K_s \cdot \frac{0.0144}{90} = \text{درجه N.m/}$$

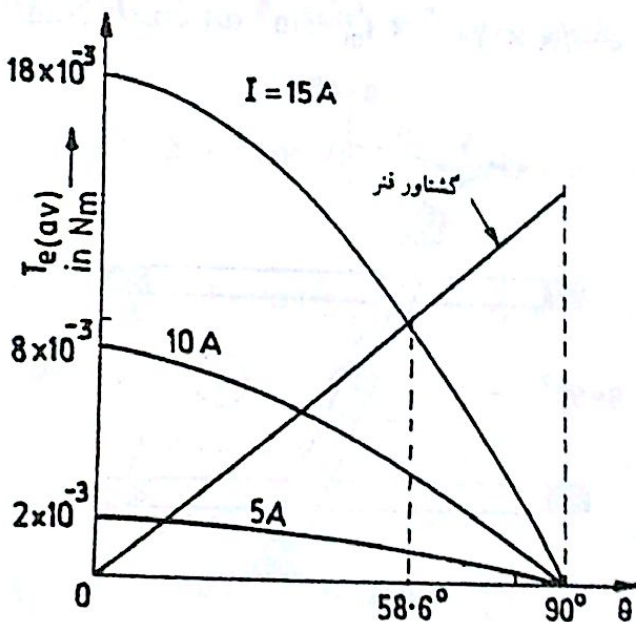
برای سایر مقادیر جریان I و انحراف θ رابطه تعادل گشتاور چنین است:

$$\frac{0.0144}{90} (\theta) = 0.4 \times 10^{-4} I_m^2 \cos \theta$$

$$I^2 = \frac{0.0144 \times 10^4}{90 \times 0.4 \times 2} \frac{\theta}{\cos \theta}$$

یا:

$$I = \sqrt{2 \frac{\theta}{\cos \theta}} = 1.414 \sqrt{\frac{\theta}{\cos \theta}}$$



شکل ۲-۲۸ (a) - منحنی تغییرات $T(av)$ با θ

مقادیر انحراف θ و جریانهای متناظر با آنها در جدول زیر آمده اند:

θ بر حسب درجه	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
I بر حسب آمپر	۰	۳/۱۷	۴/۵	۵/۵۷	۸/۳۲	۱۱/۳	۱۵/۵	۲۰	۳۰/۵	∞

تغییرات جریان بر حسب θ در شکل (b) ۲-۲۸ رسم شده است .

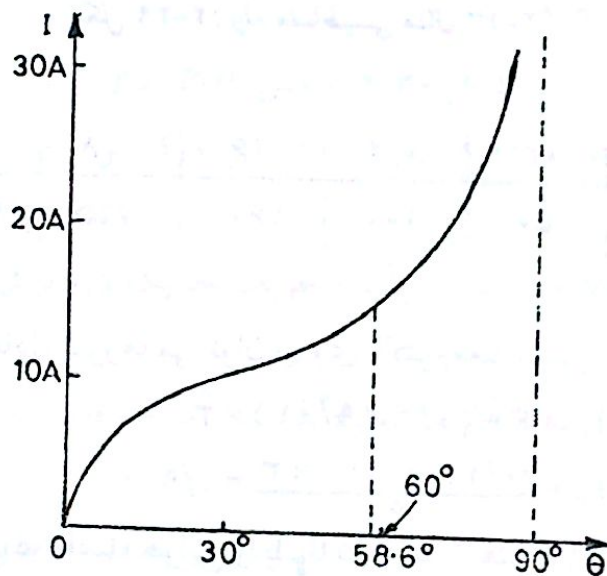
(a) برای جریان 15^A رابطه تعادل گشتاورها چنین است :

$$0.4 \times 10^{-2} (\sqrt{2} \times 15)^2 \cos \theta = \frac{0.144}{90} \theta$$

یا :

$$112/5 \cos \theta = \theta$$

با استفاده از روش سعی و خطا مقدار زاویه θ را 58.6° بدست می آوریم . بنابراین محدوده انحراف عقربه از صفر درجه تا 58.6° است .



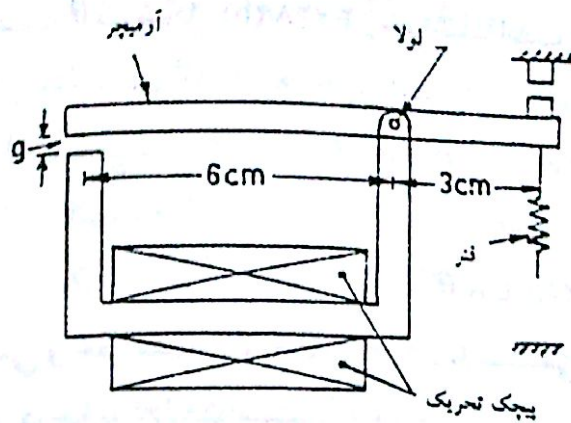
شکل ۲-۲۸ ب) تغییرات جریان با زاویه θ

مثال ۲.۱۳

در رله مغناطیسی شکل (۲-۲۹) فنر نیروی کششی 0.2 kg را اعمال می کند . وقتی جریان تحریک صفر است . رله در موقعیت باز قرار دارد و طول فاصله هوایی 0.5 g ، ساتیمتر است . وبا انرژی گرفتن سیم پیچ طول فاصله هوایی به 0.1 ساتیمتر می رسد . سیم پیچ 2000 دور دارد و از شار پراکندگی مغناطیسی و شکستگی آن صرف نظر می کنیم . منحنی مغناطیسی ماده سازنده هسته رله داده شده است . طول موثر مسیر مغناطیسی آهن 20 cm^2 و سطح مقطع عرضی آن 0.2 cm^2 است .

الف) وقتی رله در موقعیت باز قرار دارد جریان تحریک لازم برای بردن آن به موقعیت بسته را پیدا می کند .

ب) برای بسته نگهداشتن رله چه مقدار جریان تحریک لازم است ؟



شکل ۲۹-۲: رله مغناطیسی مثال ۱۳-۲

B بر حسب Wb/m^2	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱	۱/۲
H بر حسب AT/m	۵۰	۱۰۰	۱۶۰	۲۲۵	۳۰۰	۴۰۰

حل: الف) از رابطه تعادل نیروها می توان نیروی الکترومغناطیسی F_c را پیدا کرد:

$$F_c \times 6 = (0.2 \times 9/81) \times 3$$

$$F_c = \frac{(0.2 \times 9/81) \times 3}{6} = 0.981 \text{ نیوتن}$$

چگالی شار مغناطیسی در فاصله هوایی را با B_g نشان می دهیم.

$$F_c = \frac{1}{2} \frac{B_g^2 A}{\mu_0} = 0.981$$

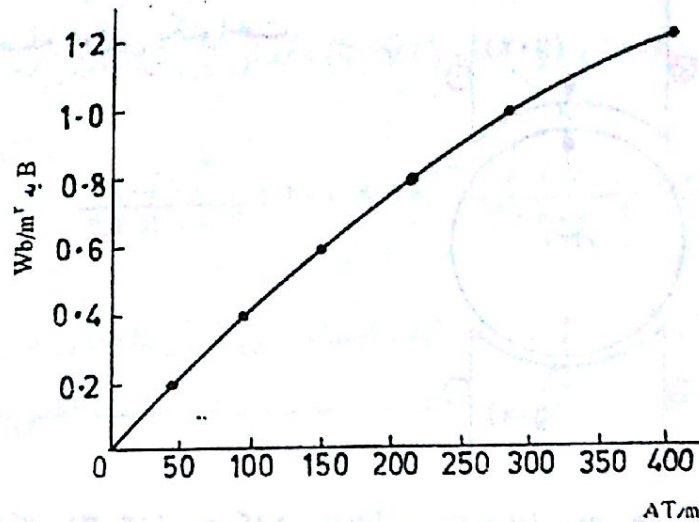
$$\therefore B_g^2 = \frac{2 \times 0.981 \times 4\pi \times 10^{-7}}{0.2 \times 10^{-2}} = 0.1233$$

$$\Rightarrow B_g = \sqrt{0.1233} = 0.351 \text{ Wb/m}^2$$

از منحنی مغناطیسی شکل (۲-۳۰) نتیجه می گیریم که وقتی چگالی شار 0.351 Wb/m^2 باشد، شدت میدان مغناطیسی متناظر آن برابر $87/7 \text{ AT/m}$ خواهد بود. پس:

$$\text{آمپر دور کل برای طول آهن} = 0.20 \times 87/7 = 17/54$$

$$\text{آمپر دور فاصله هوا} = \frac{B_g}{\mu_0} g = \frac{(0.351)(0.5 \times 10^{-2})}{4\pi \times 10^{-7}} = 1396/58$$



شکل ۲-۳۰: منحنی $B-H$ ، مثال ۲-۱۳

∴ شامل آمپردورکل برای مسیر مغناطیسی شامل $= ۱۳۹۶/۵۸ + ۱۷/۵۴ = ۱۴۱۴/۱۲$

فاصله هوایی به طول $۰/۵\text{cm}$

جریان تحریک لازم برای بستن آرمیچر رله $= \frac{۱۴۱۴/۱۲}{۲۰۰۰} = ۰/۷۰۷۱\text{ A}$

(ب)

آمپردور فاصله هوایی وقتی $g=۰/۱\text{cm}$ است $= \frac{(۰/۳۵۱)(۰/۱ \times ۱۰^{-۲})}{4\pi \times ۱۰^{-۷}} = ۲۷۹/۳۲$

آمپردورکل مسیر مغناطیسی وقتی $g=۰/۱\text{cm}$ است $= ۲۷۹/۳۲ + ۱۷/۵۴ = ۲۹۶/۸۶$

جریان تحریک لازم برای بسته نگهداشتن آرمیچر $= \frac{۲۹۶/۸۶}{۲۰۰۰} = ۰/۱۴۸۴\text{ A}$

مثال ۲.۱۴

در یک ماشین dc بواسطه کهنه شدن یا طاقانها ، فاصله هوایی زیر قطبها ، یکتواخت نیست .

الف) عبارتی برای کشش مغناطیسی نامتعادل بر روی آرمیچر بدست آورید .

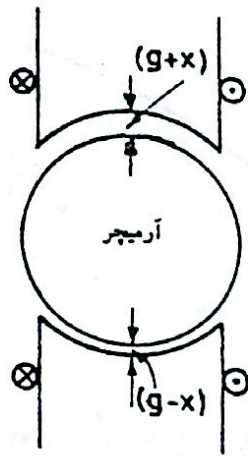
در این مثال ماشین dc دو قطبی شکل (۲-۳۱) را در نظر بگیرید .

ب) در یک ماشین dc دو قطبی ، آرمیچر باندازه $۰/۱\text{mm}$ جابجا شده است سایر اطلاعات

به قرار زیر است :

$۰/۸\text{ Wb/m}^2$ چگالی شار فاصله هوایی

۲۰۰ cm^2 سطح زیر هر قطب



طول فاصله هوایی یکنواخت = $g/6$ cm

شکل ۳۱-۲: نیروی کشش مغناطیسی نامتعادل مثال ۱۴-۲

مقدار کشش مغناطیسی نامتعادل آرمیچر را بدست آورید .

حل : الف) طول فاصله هوایی یکنواخت ماشین dc را با g نشان می دهیم . همانطور که در شکل (۲-۳۱) نشان داده شده است بواسطه کهنگی دو فاصله هوایی $(g+x)$ و $(g-x)$ خواهند بود. قطبهای شمال و جنوبی که نزدیک هر فاصله هوایی ایجاد می شود ، نیروی جذبی یا کششی بر آرمیچر اعمال می کنند . برای فواصل هوایی مساوی زیر دو قطب ، هر قطب آرمیچر را با نیروی $A_p \frac{B_g^2}{2\mu_0}$ نیوتن جذب می کند ، پس نیروی کشش مغناطیسی متعادل در آرمیچر صفر می شود . در اینجا :

B_g = چگالی شار فاصله هوایی زیر هر قطب

A_p = سطح زیر هر قطب

اگر فواصل هوایی نامساوی باشند ، کشش مغناطیسی نامتعادل مطرح می شود و مقدار آنرا بصورت زیر می توان بدست آورد :

در فاصله هوایی بزرگتر که طول $(g+x)$ دارد نیروی کششی کاهش پیدا کرده و به $\frac{1}{2} \frac{B_g^2}{\mu_0} A_p \frac{g}{g+x}$ می رسد . در فاصله هوایی کوچکتر که طول $(g-x)$ دارد نیروی کششی افزایش پیدا کرده و به $\frac{1}{2} \frac{B_g^2}{\mu_0} A_p \frac{g}{g-x}$ می رسد .

$$\therefore \text{کشش مغناطیسی نامتعادل در آرمیچر ماشین dc} = \frac{1}{2} \frac{B_g^2}{\mu_0} A_p g \left[\frac{1}{g-x} - \frac{1}{g+x} \right]$$

$$= \frac{B_g^2}{\mu_0} A_p \frac{gx}{g^2-x^2} \quad \text{نیوتن} \quad (۲-۷۲)$$

در فاصله هوایی یکنواخت ، x صفر است و در نتیجه کشش مغناطیسی نامتعادل نیز صفر خواهد بود .

ب) با جایگذاری مقادیر عددی در رابطه (۲-۷۲) مقدار نیروی کشش مغناطیس نامتعادل بدست می آید:

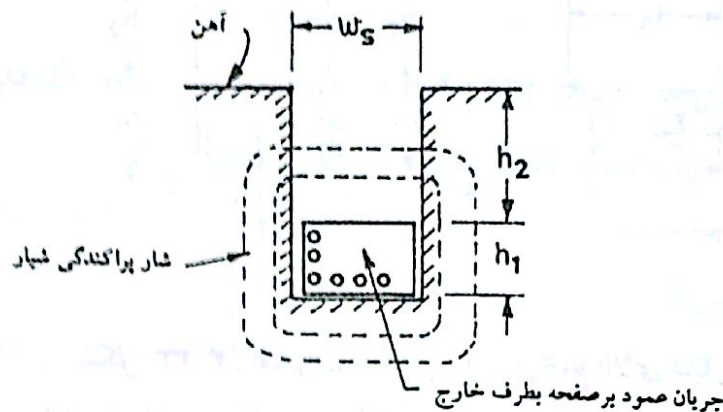
$$\frac{(0/1)^2}{4\pi \times 10^{-7}} (2000 \times 10^{-4}) \frac{6 \times 0/1}{36-0/01} = 169/76 \text{ نیوتن}$$

مثال ۲.۱۵

در شکل (۲-۳۲) یک شیار نشان داده شده است. این شیار ۷٪ هادی دارد و در هر هادی جریان i آمپر برقرار است. فرض کنیم که ضریب نفوذپذیری قسمت آهنی مدار مغناطیسی بی نهایت است.

الف) تغییرات چگالی شار را در:

- ۱- فضای بالای هادیها در شیار
- ۲- فضای اشغال شده توسط هادیها در شیار پیدا کنید.



شکل ۲-۳۲: شار پراکندگی شیار در مثال ۲-۱۵

ب) عبارتی برای شار پراکندگی در فضای بالای هادیها بدست آورید.

ج) نیروی الکترومغناطیسی F_e را که توسط شار نشتی شیار موجود در فضای بالای هادیها بوجود آمده است پیدا کنید.

د) اگر: $i = \sqrt{2} (1000) \sin 314t$ باشد، مقدار و جهت نیروی مغناطیسی قسمت ج را تعیین کنید. دو هادی بطول ۱ متر در شیار خوابانده شده اند و پهنای شیار 5 cm است.

حل: الف) چون از مقاومت مغناطیسی مسیر آهنی صرف نظر کرده ایم، تمامی $m.m.f$ فقط در پهنای شیار w_s جای می گیرد.

۱- اگر H_s شدت میدان مغناطیسی در فضایی بالای هادیها بر حسب آمپر دور بر واحد

طول باشد آنگاه :

$$H_s w_s = iz_s$$

$$H_s = \frac{iz_s}{w_s}$$

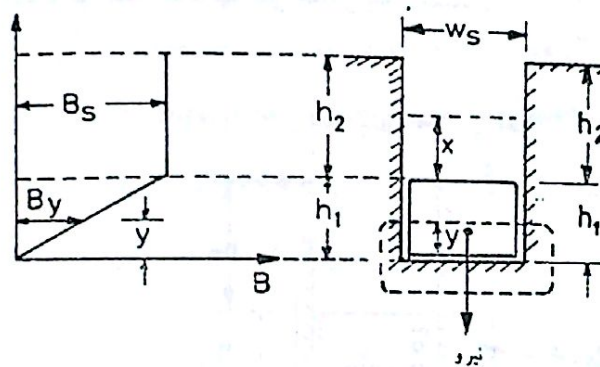
$$\therefore \text{چگالی شار } B_s = \mu_0 H_s = \frac{\mu_0 iz_s}{w_s}$$

چون جریان ثابت است چگالی شار B_s در فضای بالای هادیها هم ثابت است. (شکل ۲-۳۳)
 $H_y - 2$ شدت میدان مغناطیسی در ارتفاع y از سطح هادی است :

$$H_y w_s = iz_s \frac{y}{h_1}$$

$$H_y = \frac{iz_s}{w_s} \frac{y}{h_1}$$

$$\text{چگالی شار } B_y = \mu_0 H_y = \frac{\mu_0 iz}{\omega} \frac{y}{h_1}$$



شکل ۲-۳۳: تغییرات چگالی شار در ارتفاع بالای شیار

تغییرات چگالی شار در ارتفاع $(h_1 + h_2)$ بالای شیار در شکل (۲-۳۳) نشان داده شده است.
 ب) شار پراکندگی ϕ_s در ناحیه بالای هادیها در شیار از رابطه زیر بدست می آید :

$$\phi_s = B_s (h_2 l) = \frac{\mu_0 iz_s}{w_s} h_2 l \quad \text{Wb}$$

در اینجا l طول متوسط هادی قرار گرفته در شیار در جهت عمود بر صفحه کاغذ است.
 رابطه ϕ_s نشان می دهد که شار پراکندگی شیار مستقیماً متناسب با ارتفاع شیار و طول شیار است و با ضخامت شیار نسبت معکوس دارد.

ج) شیار با ارتفاع x درست در بالای ارتفاع h_1 همانطور که در شکل (۲-۳۳) نشان داده شده است در نظر بگیرید. انرژی مغناطیسی ذخیره شده بواسطه شار پراکندگی شیار ϕ_s در ارتفاع x از رابطه زیر بدست می آید :

$$W_{fld} = \frac{1}{2} \frac{B_s^2}{\mu_0} \times l \omega_s$$

با جایگذاری مقدار B_s خواهیم داشت:

$$W_{fld}(i, x) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 i^2 Z_s^2}{w_s} \times l$$

$$\therefore \text{نیروی الکترومغناطیسی} = F_e = \frac{\partial W_{fld}}{\partial x}(i, x) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 i^2 Z_s^2}{w_s} l =$$

= نیرویی که توسط شار پراکندگی شیاری موجود در فضای بالای هادیها ایجاد شده است. (د) جهت نیروی F_e بطرف کف شیار است، و به جهت جریان بستگی ندارد. با جایگذاری مقادیر عددی در عبارت F_e خواهیم داشت:

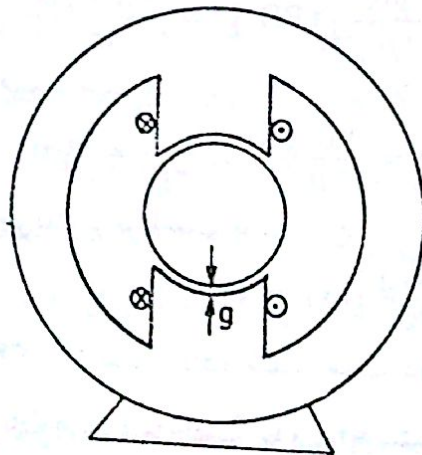
$$F_e = \frac{1}{2} \frac{4\pi \times 10^{-7} (2)^2 \times 1}{5 \times 10^{-2}} (\sqrt{2} \times 1000)^2 \sin^2 \omega t = 32\pi \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right)$$

$$F_{e(av)} = \frac{32\pi}{2} = 50/265 \text{ نیوتن}$$

مثال ۲-۱۶

الف) در ماشین dc دو قطبی شکل (۲-۳۴)، هادی آرمیچر i آمپر جریان دارد. عبارتی برای نیروی الکترومغناطیسی F_e که به هادی وارد می شود بدست آورید.
ب) با استفاده از نتیجه قسمت الف، نیروی بین دو هادی موازی که دارای جریانهای i_1 و i_2 هم جهت هستند تعیین کنید.

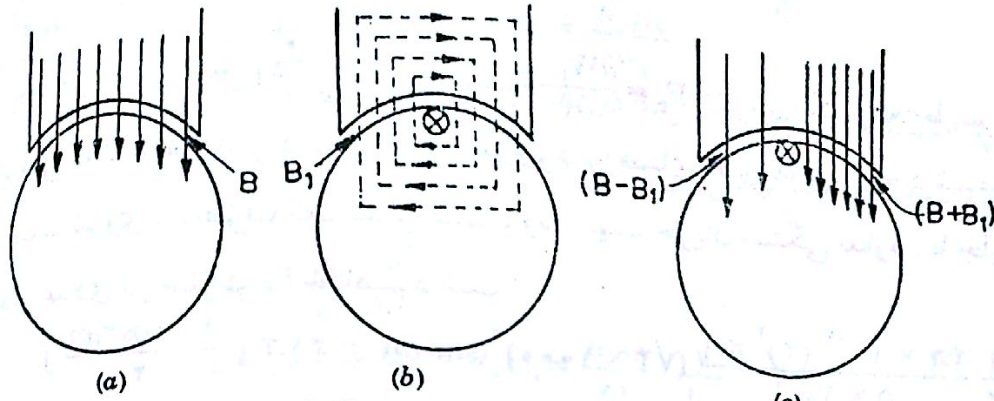
حل: الف) همانطور که در شکل (a) ۲-۳۵ نشان داده شده است، وقتی جریان هادی صفر باشد توزیع شار فاصله هوایی ناشی از، قطب شمال در قسمت بالای قطب یکنواخت است. این چگالی شار یکنواخت استاتور را با B نشان می دهیم. اگر در هادی جریان i برقرار باشد



شکل ۲-۳۴: مربوط به مثال ۲-۱۶

و سیم پیچ میدان تحریک نشده باشد در اینصورت توزیع شار مطابق شکل (b) ۲-۳۵ خواهد بود. چگالی شار که با جریان i ایجاد شده است را با B_1 نشان می دهیم.

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2g}$$



شکل ۲-۳۵: نمایش توزیع شار - مثال ۲-۱۶

فرض می کنیم مقاومت مغناطیسی فقط توسط فاصله هوایی تأمین شود. همانطور که نشان داده شده است شار هادی مجبور است دوبار از فاصله هوایی عبور کند.

وقتی سیم پیچ میدان و هادی هر دو جریان داشته باشند، توزیع شار متوجه را با جمع کردن توزیع شار قسمتهای الف و ب بدست می آوریم. در نتیجه چگالی شار در سمت راست هادی $B_1 + B$ و در سمت چپ آن $B - B_1$ خواهد بود. اگر هادی جابجایی کوچک x را به سمت راست انجام دهد در اینصورت تغییر در انرژی مغناطیسی ذخیره شده در فاصله

هوایی را از رابطه زیر بدست می آوریم:

$$W_{fld} = \left[\frac{1}{2} \frac{(B + B_1)^2}{\mu_0} - \frac{1}{2} \frac{(B - B_1)^2}{\mu_0} \right] glx$$

g طول فاصله هوایی و l طول محوری هادی می باشد.

$$W_{fld} = \frac{glx}{2\mu_0} [4BB_1] = \frac{2BB_1 glx}{\mu_0}$$

با جایگذاری مقدار B_1 خواهیم داشت:

$$W_{fld}(i,x) = \frac{2B glx}{\mu_0} \cdot \frac{\mu_0 i}{2g} = Bli$$

نیروی وارد بر هادی حامل جریان برابر است با:

$$F_e = \frac{\partial W_{fld}}{\partial x}(i,x) = Bli$$

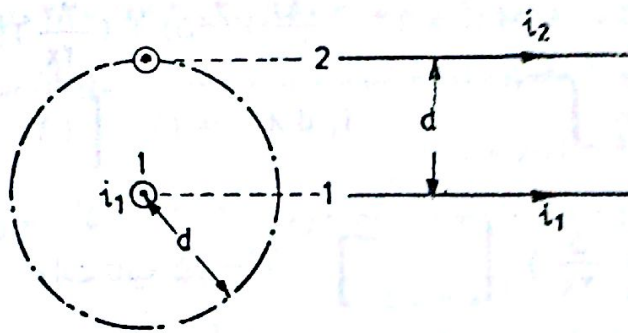
(د) همانطور که در شکل (۲-۳۶) نشان داده شده است دو هادی به فاصله d از هم قرار گرفته اند و هر دو حامل جریان های هم جهت i_1 و i_2 هستند. شدت میدان مغناطیسی H_1 در هادی ۲ که توسط جریان i_1 بوجود می آید برابر است با:

$$H_1 \cdot 2\pi d = \text{کل جریان محصور شده} = i_1$$

$$\therefore H_1 = \frac{i_1}{2\pi d}$$

$$\therefore \text{چگالی شار } B_1 \text{ در هادی ۲} = B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \quad \text{Wb/m}^2$$

$$\therefore \text{نیروی جاذبی بین دو هادی} = B_1 i_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} \quad \text{نیوتن}$$



شکل ۳-۲: نیروی بین دو هادی حامل جریان

مثال ۲.۱۷

ضریب خود القاء و القاء متقابل دو سیم پیچ تزویج شده بر حسب هانری و تحت جابجایی مشخص x بر حسب متر عبارتند از:

$$L_1 = 3 + \frac{1}{2x} \quad \text{و} \quad L_2 = 2 + \frac{1}{2x} \quad \text{و} \quad M_{12} = M_{21} = \frac{1}{2x}$$

مقاومت سیم پیچ ها قابل اغماض است. برای جریانهای ثابت $I_1 = 10 \text{ A}$ و $I_2 = -5 \text{ A}$:

الف) کار مکانیکی که در طی افزایش x از $0/5$ به 1 متر انجام می شود بدست آورید.

ب) در قسمت (الف) انرژی که هر منبع الکتریکی می دهد بدست آورید.

ج) در قسمت (الف) تغییر انرژی میدان را بدست آورید.

تحقیق کنید که در طی جابجایی از $x = 0/5$ به $x = 1$ متر، مجموع انرژی تبدیل شده به کار

مکانیکی انجام شده و انرژی میدان برابر است با انرژی که هر دو منبع به سیستم می دهند.

حل: در حالت خطی:

$$\begin{aligned} W_{fld}(i_1, i_2, x) &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + i_1 i_2 M \\ &= \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{x} \right) 100 + \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{x} \right) 25 + (-50) \left(\frac{1}{2x} \right) = 175 + \frac{25}{2x} \end{aligned}$$

$$F_e = \frac{\partial W_{fld}(i_1, i_2, x)}{\partial x} = -\frac{25}{x^2} \quad \text{الف): از رابطه (۲-۲۶):}$$

$$W_{mech} = \int_{0.5}^1 F_e dx = \int_{0.5}^1 \left(\frac{-25}{x^2}\right) dx = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{x}\right) \Big|_{0.5}^1 = \frac{-25}{4} \text{ (J)}$$

$$dW_{elec} = i_1 d\psi_1 + i_2 d\psi_2 \quad \text{ب):}$$

در اینجا:

$$\psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = \left(3 + \frac{1}{2x}\right) 10 + (-5) \left(\frac{1}{2x}\right) = 30 + \frac{5}{2x}$$

$$\psi_2 = L_2 i_2 + M i_1 = \left(2 + \frac{1}{2x}\right) (-5) + \left(\frac{1}{2x}\right) (10) = -10 + \frac{5}{2x}$$

$$W_{elec1} = \int_{\lambda_1(x=0.5)}^{\lambda_1(x=1)} i_1 d\lambda_1 = (10) \left[\left(30 + \frac{5}{2x}\right) \right]_{x=1}$$

$$- \left(30 + \frac{5}{2x}\right) \Big|_{x=0.5} \quad \text{وات ثانیه } = -25$$

بهمین ترتیب:

$$W_{elec2} = \int_{\lambda_2(x=0.5)}^{\lambda_2(x=1)} i_2 d\lambda_2 = (-5) \left[\left(-10 + \frac{5}{2x}\right) \right]_{x=1}$$

$$- \left(-10 + \frac{5}{2x}\right) \Big|_{x=0.5} \quad \text{وات-ثانیه } = 12/5$$

خالص انرژی الکتریکی خالص ورودی:

$$W_{elec} = W_{elec1} + W_{elec2} = -25 + 12/5 = -12/5 \quad \text{وات-ثانیه}$$

ج):

$$W_{fld}(i_1, i_2, x) = 175 + \frac{25}{4x}$$

تغییر انرژی از $x = 0.5$ تا $x = 1$ m برابر است با:

$$W_{fld} = (W_{fld} \text{ در } x = 1) - (W_{fld} \text{ در } x = 0.5)$$

$$= \left(175 + \frac{25}{4}\right) - \left(175 + \frac{25}{2}\right) = \frac{-25}{4} \quad \text{وات-ثانیه}$$

اینجا:

$$W_{fld} + W_{mech} = \frac{-25}{4} - \frac{25}{4} = -12.5 = W_{elec}$$

این موضوع نتیجه مورد نیاز را تأیید می کند.

مثال ۲.۱۸

برای دو سیم پیچ مثال (۱۷-۲)، متوسط نیروی مغناطیسی را در $x = 0.5$ متر محاسبه

کنید در صورتی که:

الف) هر دو سیم پیچ موازی با هم به یک منبع ولتاژ $220 \cos 314t$ متصل گردند.

ب) هر دو سیم پیچ بطور سری با هم به منبع ولتاژ $220 \cos 314t$ متصل گردند.

ج) در حالیکه سیم پیچ ۲ اتصال کوتاه شود، سیم پیچ (۱) بهمان منبع ولتاژ مذکور در قسمت الف متصل گردد.

د) هر دو سیم پیچ بطور سری با هم با منبع جریان $0.5 \cos 314t$ عبور کند.

حل: برای حالت خطی:

$$W_{fld}(i_1, i_2, x) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + i_1 i_2 M$$

$$= \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{2x} \right) i_1^2 + \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{2x} \right) i_2^2 + i_1 i_2 \left(\frac{1}{2x} \right)$$

$$F_e = \frac{\partial W_{fld}(i_1, i_2, x)}{\partial x} = -\frac{1}{4x^2} i_1^2 - \frac{1}{4x^2} i_2^2 - i_1 i_2 \frac{1}{2x^2}$$

برای $x = 0.5$ m

$$F_e = -i_1^2 - i_2^2 - 2i_1 i_2$$

$$\psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = \left(3 + \frac{1}{2x} \right) i_1 + \frac{1}{2x} i_2$$

الف):

$$\psi_2 = M i_1 + L_2 i_2 = \frac{1}{2x} i_1 + \left(2 + \frac{1}{2x} \right) i_2$$

$$\psi_2 = i_1 + 3i_2 \quad \text{و} \quad \psi_1 = 4i_1 + i_2 \quad : x = 0.5 \text{ m}$$

هنگامیکه سیم پیچ ها با هم موازی باشند:

$$v = \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d\psi_2}{dt}$$

یا:

$$4 \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} + 3 \frac{di_2}{dt}$$

پس:

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{3}{2} \frac{di_1}{dt} \quad \text{یا} \quad i_2 = \frac{3}{2} i_1$$

$$220 \cos(314t) = 4 \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{11}{2} \frac{di_1}{dt}$$

$$\frac{di_1}{dt} = 40 \cos(314t) \quad \text{یا:}$$

$$\text{یا} \quad i_1 = \frac{40}{314} \sin 314t$$

$$\therefore i_2 = \frac{60}{314} \sin 314t$$

با جایگذاری مقادیر i_1 و i_2 در عبارت F_e خواهیم داشت:

$$F_e = \frac{-1}{(314)^2} [(40)^2 + (60)^2 + 2(60)(40)] \sin^2 314t = -0.101424 \sin^2 314t$$

$$\therefore F_{e(av)} = -0.050712 \quad \text{N}$$

$$v = \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\psi_2}{dt} = \left(4 \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) + \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{3di_2}{dt} \right) \quad \text{(ب):}$$

درحالتی که سیم پیچ ها بصورت سری وصل شده اند:

$$i_1 = i_2 = i$$

$$\therefore 220 \cos 314t = 9 \frac{di_1}{dt}$$

$$i = \frac{220}{9 \times 314} \sin 314t \quad \text{یا:}$$

$$\therefore F_e = -4 \left(\frac{220}{9 \times 314} \right)^2 \sin^2 314t$$

$$F_{e(av)} = -0.01212 \quad \text{N}$$

(ج) اگر سیم پیچ ۲ اتصال کوتاه شود و سیم پیچ ۱ را به منبع ولتاژ وصل شود:

$$v = 4 \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$$

$$0 = \frac{di_1}{dt} + 3 \frac{di_2}{dt} \longrightarrow \frac{di_1}{dt} = -3 \frac{di_2}{dt}$$

$$\therefore 220 \cos 314t = v = -12 \frac{di_2}{dt} + \frac{di_2}{dt} = -11 \frac{di_2}{dt}$$

$$i_2 = -\frac{20}{314} \sin 314t \quad \text{و} \quad i_1 = \frac{60}{314} \sin 314t$$

$$\therefore F_e = \frac{-1}{314} [(60)^2 + (20)^2 - 2(20)(60)] \sin^2 314t = -\left(\frac{40}{314}\right)^2 \sin^2 314t$$

$$F_{e(av)} = -0.00811 \quad \text{N}$$

مثال ۲.۱۹

دو سطح مغناطیسی توسط فاصله g از هم جدا شده اند و شاری با چگالی شار $1/6 T$ بین آنها وجود دارد. این مقدار حد معمول اشباع در مواد فرومغناطیسی است. اگر $1m^2 = A$ باشد نیروی بین این دو سطح را بدست آورید.

حل: فرض کنیم مساحت دو سطح مغناطیسی که توسط فاصله g از هم جدا شده اند A باشد. برای جابجایی x در جهت نیروی F_e ، مسافت بین دو سطح به $(g-x)$ می رسد و انرژی ذخیره شده در میدان چنین خواهد شد:

$$W_{fld}(B, x) = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} [A(g-x)]$$

$$F_e = -\frac{\partial W_{fld}(B, x)}{\partial x} \quad \text{از رابطه (۲-۲۱):}$$

$$\frac{1}{2} \frac{B^2 A}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{(1/6)^2 \times 1}{4\pi \times 10^{-7}} = \frac{0.32}{\pi} \times 10^7 \quad \text{N}$$

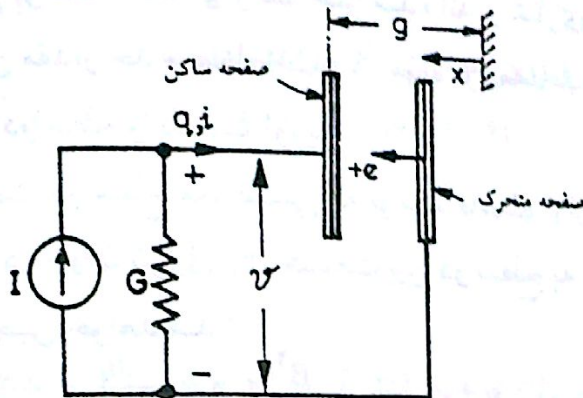
۲-۶ سیستم های تک تحرکه با واسطه میدانهای الکتریکی

بررسی سیستم های الکترومکانیکی با میدانهای الکتریکی بعنوان واسطه، بهمان نحوی که سیستم های با واسطه میدانهای مغناطیسی قبلاً مورد بحث قرار گرفتند صورت می گیرد. در اینجا هم مولفه های انرژی و شبه انرژی برای بدست آوردن روابط نیرو و گشتاور مورد بررسی قرار می گیرند. بار و ولتاژ در میدان الکتریکی به ترتیب شبیه به شار دربرگیرنده و جریان در میدان مغناطیسی هستند.

الف) انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی:

در شکل (۲-۳۷) یک دستگاه مبدل انرژی تک تحرکه با واسطه میدانهای الکتریکی به صورت یک خازن که دارای صفحات ساکن و متحرک است نمایش داده شده است. در این مدار یک منبع جریان خازن را تغذیه می کند و بعلاوه جریان نشتی خازن با هدایت اهمی G

نشان داده شده است. این بدان معنی است که میدان الکتریکی بین دو صفحه محافظه کار (۱) است، یعنی می توان همه انرژی تزریق شده را از دستگاه بازپس گرفت. از رابطه (۲-۳) و مشابه سیستم مغناطیسی می توان انرژی جاری شده به سیستم میدان الکتریکی را بدست آورد. وقتی منبع جریان وصل باشد، جریان و بار الکتریکی به دستگاه شکل (۲-۳۷) وارد می شوند، انرژی الکتریکی جزئی ورودی به خازن در زمان dt



شکل ۲-۳۷: دستگاه مبدل انرژی میدان الکتریکی تک تحرک

برابر است با:

$$dW_{elec} = v i dt = v dq \quad (2-74)$$

کار مکانیکی که نیروی F_e در زمان dt انجام می دهد:

$$dW_{mech} = F_e \cdot dx \quad (2-75)$$

dx جابجایی یا حرکت صفحه در جهت F_e و در زمان dt است.

معادله (۲-۳) برحسب مولفه های رابطه های (۲-۷۴) و (۲-۷۵) چنین خواهد شد:

$$v dq = dW_{fld} + F_e \cdot dx \quad (2-76)$$

اگر صفحه متحرک را نگهداشته باشیم وقادر به حرکت نباشد، در اینصورت $F_e \cdot dx = 0$ و رابطه (۲-۷۶) بصورت زیر نوشته می شود:

$$dW_{elec} = dW_{fld} = v \cdot dq \quad (2-77)$$

توجه کنید که در این رابطه v ثابت است و بار از صفر به q می رسد:

$$\therefore W_{fld} = \int_0^q v \cdot dq$$

در میدان الکتریکی خطی: $C = \frac{q}{v}$ = ظرفیت دستگاه

$$\therefore W_{fld} = \frac{1}{C} \int_0^q q \cdot dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (2-78 \text{ الف})$$

$$W_{fld} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} vq. \quad (2-78 \text{ ب})$$

ظرفیت C به فاصله بین دو صفحه بستگی دارد و بصورت $C = \frac{\epsilon_0 A}{(g-x)}$ نوشته می شود. که در آن:

A = سطح صفحه

ϵ_0 = نفوذپذیری الکتریکی خلاء

لذا انرژی میدان W_{fld} ، تابعی از دو متغیر مستقل q و x است:

$$W_{fld}(g, x) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C(x)} \quad (2-79)$$

رابطه (2-79) نشان می دهد که تغییر انرژی میدان الکتریکی با تغییر بار الکتریکی q و با تغییر x (یعنی با حرکت کردن صفحه متحرک خازن) امکان پذیر خواهد بود.

$$W_{fld} = \int_0^D E \cdot dD = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon_0} \quad (2-80)$$

D = چگالی شار میدان الکتریکی

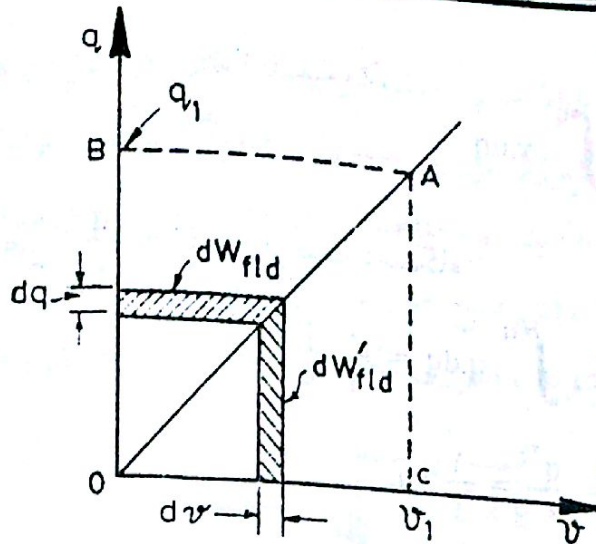
E = شدت میدان الکتریکی یا گرادیان پتانسیل $= \frac{D}{\epsilon_0}$

ب) کوانرژی: در حالت خطی، تغییر q با v در شکل (2-38) نشان داده شده است. مشابه سیستم مغناطیسی شبه انرژی W'_{fld} سطح OACO است. این شکل راباشکل (c) 2-3 مقایسه کنید.

$$\therefore \text{OACO سطح} = \int_0^{v_1} q \cdot dv = C \int_0^{v_1} v \cdot dv$$

$$W_{fld} = \frac{1}{2} C v_1^2$$

بطور کلی:



شکل ۲-۳۸: انرژی و شبه انرژی میدان الکتریکی در مدار خطی

$$W'_{fld}(v, x) = \frac{1}{2} C(x) v^2 \quad (2-81)$$

$$W'_{fld} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (2-82)$$

ج) محاسبه نیرو: نیرویی که میدان الکتریکی ایجاد می کند مشابه با سیستم های مغناطیسی می توان با استفاده از توابع انرژی یا شبه انرژی میدان بدست آورد. انرژی ذخیره شده در میدان به q و x بستگی دارد و همانطور که در رابطه (۲-۷۱) نشان داده شده است می توان نوشت:

$$dW_{fld}(q, x) = v dq - F_e dx \quad (2-83)$$

و نیز انرژی میدان $W_{fld}(q, x)$ را می توان بصورت ریاضی برحسب مشتقات جزئی مولفه های آن نوشت:

$$dW_{fld}(q, x) = \frac{\partial W_{fld}}{\partial q} dq + \frac{\partial W_{fld}}{\partial x} dx \quad (2-84)$$

انرژی میدان که در روابط (۲-۸۳) و (۲-۸۴) محاسبه شده است مساوی هستند لذا ضرایب مولفه های مرتبط با dq و dx در دو رابطه باید با هم مساوی باشند:

$$\therefore v = \frac{\partial W_{fld}(q, x)}{\partial q} \quad (2-85)$$

$$F_e = - \frac{\partial W_{fld}(q, x)}{\partial x} \quad (2-86)$$

شکل (۲-۳۸) نشان می دهد که:

$$W'_{fld} = q_1 v_1 - W_{fld}$$

به طور کلی:

$$W'_{fld}(v, x) = qv - W_{fld}(q, x)$$

و به شکل دیفرانسیلی :

$$dW'_{nd}(v,x) = d(qv) - dW_{nd}(q,x) \quad (2-87)$$

با جایگذاری رابطه (2-83) در رابطه (2-87) خواهیم داشت :

$$dW'_{nd}(v,x) = qdv + vdq - vdq + F_e dx = qdv + F_e dx \quad (2-88)$$

و چون W'_{nd} به v و x وابسته است می توان آنرا بصورت ریاضی بر حسب مشتقات جزئی مولفه ها بیان کرد :

$$dW'_{nd}(v,x) = \frac{\partial W'_{nd}}{\partial v} dv + \frac{\partial W'_{nd}}{\partial x} dx \quad (2-89)$$

ضرایب dv و dx در سمت راست روابط (2-88) و (2-89) باید مساوی باشند و با مساوی قرار دادن آنها روابط بار و نیرو را بدست می آوریم :

$$q = \frac{\partial W'_{nd}(v,x)}{\partial v} \quad (2-90)$$

$$F_e = \frac{\partial W'_{nd}(v,x)}{\partial x} \quad (2-91)$$

روابط (2-86) و (2-91) عبارتی برای نیرو در سیستم میدان الکتریکی می دهند که با روابط (2-21) و (2-23) که نیرو رادر سیستم میدان مغناطیسی بیان می کند متناظر هستند. توجه داشته باشید که انرژی میدان در رابطه (2-86) باید صریحاً بر حسب q و x بیان شود و شبه انرژی در رابطه (2-91) نیز باید بر حسب v و x بیان شود.

مثال ۲.۲۰

دو صفحه موازی که مساحت هر کدام $A = 1 \text{ m}^2$ است توسط فاصله g از هم جدا شده اند. شدت میدان الکتریکی بین صفحات V/m 3×10^6 است. این مقدار برابر است با حد شکست استقامت عایقی. نیروی بین صفحات را پیدا کنید. از هر دو روش انرژی و شبه انرژی استفاده کنید. حل: می دانیم فاصله بین دو صفحه g است. اگر یک صفحه در جهت نیرو جابجایی x داشته باشد فاصله بین صفحات به $(g-x)$ می رسد. در این حالت انرژی ذخیره شده در میدان

الکتریکی چنین خواهد شد :

$$W_{nd}(q,x) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{q^2 (g-x)}{A \epsilon_0} \quad (2-82)$$

از رابطه (2-86) :

$$F_e = - \frac{\partial W_{nd}(q,x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{A \epsilon_0}$$

$$q = DA = \epsilon_0 EA$$

$$F_e = \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 A$$

$$W'_{fld}(v, x) : \text{شبه انرژی} = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} v^2 \frac{A \epsilon_0}{g-x}$$

$$F_e = \frac{\partial W'_{fld}(v, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} v^2 \frac{A \epsilon_0}{(g-x)^2}$$

از رابطه (۲-۹۱):

$$v = E (g-x) \quad \text{و} \quad F_e = \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 A$$

$$\therefore F_e = \frac{1}{2} (3 \times 10^6)^2 \left(\frac{10^2}{36\pi} \right) \times 1 = \frac{1}{18\pi} \times 10^2 \text{ N}$$

همانطور که نشان داده شد هر دو روش به نتیجه یکسانی رسیدند.

در اینجا جالب است مقایسه ای بین نیرویی که میدان مغناطیسی تولید می کند وقتی B نزدیک حد اشباع است و نیرویی که میدان الکتریکی تولید می کند وقتی E با حد شکست

برابر است، بعمل آید:

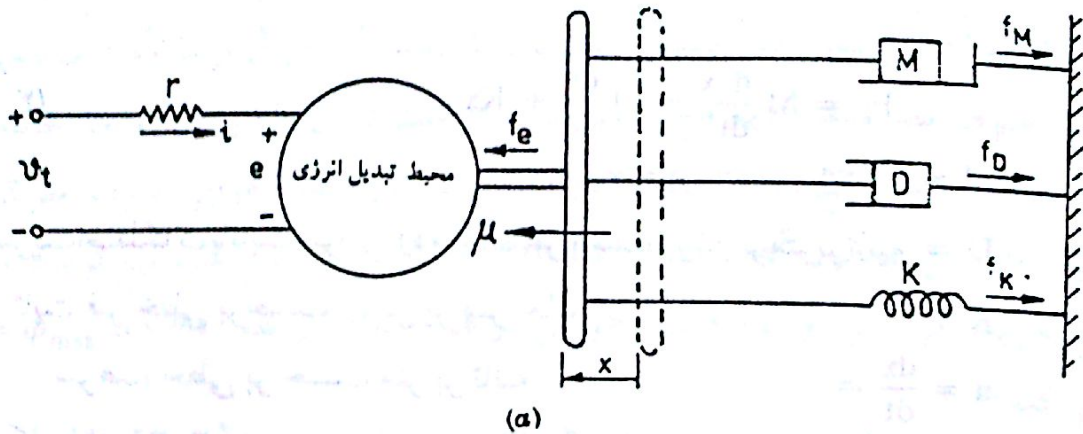
$$\therefore \frac{F_e \text{ [مثال (۲-۱۹)]}}{F_e \text{ [مثال (۲-۲۰)]}} = \frac{\text{نیرو بر واحد سطح در میدان مغناطیسی}}{\text{نیرو بر واحد سطح در میدان الکتریکی}} = \frac{0.32 \times 10^4 \times 18\pi}{\pi 10^2} = 25600$$

یعنی چگالی نیرو در میدان مغناطیسی ۲۵۶۰۰ برابر مقدار آن در میدان الکتریکی است. با فرض اینکه بیشترین مقدار ممکن و مجاز برای شدت میدان الکتریکی در نظر گرفته شده باشد. این موضوع دلیل این واقعیت است که چرا در دستگاه مبدل انرژی رایج، از میدانهای مغناطیسی بعنوان محیط واسطه استفاده می شود تا میدانهای الکتریکی. دستگاههای مبدل انرژی با میدانهای الکتریکی در توانهای بسیار کم کار می کنند و گاه "در کاربردهای با فرکانسهای نسبتاً بالا مورد استفاده قرار می گیرند.

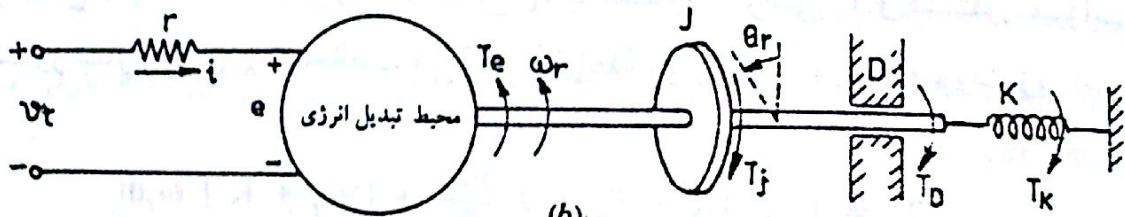
۲-۷ معادلات دینامیک مبدلهای انرژی

دستگاههای مبدل انرژی الکترومکانیکی در یک طرف با سیستم الکتریکی کار می کنند و در طرف دیگر با سیستم مکانیکی ارتباط دارند. تمامی سیستم های الکترومکانیکی بهمین صورت کار می کنند و رفتار این سیستمها از این جهت مهم است، که یک سیستم بخصوص ممکن است در حالت پایدار بصورت رضایتبخشی کار کند اما در حالتی گذرای الکترومکانیکی قابل استفاده نباشد. بنابراین در طراحی سیستم های الکترومکانیکی، تمامی سیستمهای مورد استفاده شامل سیستم های الکتریکی، دستگاههای مبدل و

سیستم های مکانیکی باید بتفصیل بررسی شوند . لذا تجزیه و تحلیل کامل یک سیستم فیزیکی شامل معادلات الکتریکی ، معادلات تبدیل انرژی و معادلات حرکت می باشد . در شکل های (a) و (b) مدل های ساده ای از سیستم های الکترومکانیکی تک تحریر نشان داده شده اند . چون در مدل شکل (a) فنر بکار رفته است ، این مدل فقط حرکتهای خطی محدود دارد . و مدل شکل (b) فقط حرکتهای گردشی محدود دارد .



(a)



(b)

شکل ۲-۳۹: (a) مدل سیستم الکترومکانیکی انتقالی تک تحریر، این مدل حرکت خطی محدود دارد .
 (b) مدل سیستم الکترومکانیکی دورانی تک تحریر ، این مدل حرکت دورانی محدود دارد .

در شکل (b) اگر فنر K با گشتاور بار مکانیکی جایگزین شود ، مدل ماشین الکتریکی دوار بدست می آید که انرژی الکتریکی را به مکانیکی تبدیل می کند . معادله ولتاژ سیستم الکتریکی شکل های (a) و (b) چنین است :

$$v_t = ir + \frac{d\psi}{dt} = ir + \frac{d}{dt} (Li) = ir + L \frac{di}{dt} + i \left(\frac{dL}{d\theta_r} \right) \frac{d\theta_r}{dt}$$

$$= ir + L \frac{di}{dt} + i \left(\frac{dL}{d\theta_r} \right) \omega_r$$

(۲-۹۲)

در رابطه (۲-۹۲) جمله $L \frac{di}{dt}$ بعنوان ولتاژ ترانسفورمری شناخته می شود ، زیرا شامل

مشتق جریان می باشد. چون در سومین جمله رابطه (۲-۹۲) سرعت ω_r وجود دارد این مولفه ولتاژ حرکتی (گردشی) نامیده می شود. توجه کنید که مولفه ولتاژ حرکتی تعیین کننده جریان یافتن انرژی بین سیستم های الکتریکی و مکانیکی است.

در شکل (a) ۲-۳۹ نیروی مغناطیسی F_e با نیروی اینرسی F_m و نیروی میرایی (دمپینگ) F_D و نیروی مقاوم فنری F_k مخالفت می کند. پس رابطه تعادل نیروها بصورت زیر است:

$$F_e = F_M + F_D + F_k = M \frac{du}{dt} + Du + K \int u \cdot dt$$

$$F_e = M \frac{d^2x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + Kx \quad (۲-۹۳)$$

$M =$ جرم بر حسب kg

$D =$ ضریب اصطکاک یا ثابت میرایی (دمپینگ) بر حسب نیوتن بر متر بر ثانیه

$K =$ ثابت فنر خطی بر حسب نیوتن بر متر جابجایی

$u = \frac{dx}{dt} =$ سرعت خطی بر حسب متر بر ثانیه

در شکل (b) ۳-۳۹ گشتاور مغناطیسی T_e با گشتاور اینرسی T_j و گشتاور میرایی T_D و گشتاور مقاوم فنری T_K مخالفت می کند لذا رابطه موازنه گشتاورها بصورت زیر است:

$$T_e = T_j + T_D + T_K = J \frac{d\omega_r}{dt} + D\omega_r + K \int \omega_r dt$$

$$T_e = J \frac{d^2\theta_r}{dt^2} + D \frac{d\theta_r}{dt} + K\theta_r \quad (۲-۹۴)$$

$J =$ ممان اینرسی (گشتاور ماند) بر حسب kgm^2

$D =$ ثابت میرایی بر حسب نیوتن متر بر رادیان بر ثانیه $N.m / rad/sec$

$K =$ ثابت فنر گردشی بر حسب نیوتن متر بر رادیان

$\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt}$ سرعت زاویه ای بر حسب rad/sec

از رابطه (۲-۹۴) می توان رابطه دینامیکی را برای موتور الکتریکی دوار بدست آورد:

$$T_e = J \frac{d^2\theta_r}{dt^2} + D \frac{d\theta_r}{dt} + T_L \quad (۲-۹۵)$$

T_L گشتاور بار است که با گشتاور مغناطیسی T_e مخالفت می کند. همانطور که قبلاً شرح داده شد نیروی مغناطیسی F_e یا گشتاور T_e را می توان با مشتق جزئی گرفتن از W_{fld} بدست آورد.

روابط (۲-۹۲) و (۲-۹۳) نشان دهنده رفتار کلی سیستم الکترومکانیکی خطی است و روابط (۲-۹۲) و (۲-۹۴) نیز نشان دهنده رفتار کلی سیستم الکترومکانیکی دورانی است.

مثال ۲.۲۱

در شکل (۲-۴۰) پیستون مغناطیسی نشان داده شده است. در آن از مقاومت مغناطیسی مسیر آهنی صرف نظر کنید. سیم پیچ N دور دارد - ثابت فنری K نیوتن بر واحد جابجایی است - از مقاومت سیم پیچ و شکستگی شار مغناطیسی در فاصله هوایی صرف نظر کنید. فرض کنید جابجایی پیستون آهنی بدون اصطکاک انجام می شود - سیم پیچ توسط ولتاژ سینوسی تحریک می شود و شار فاصله هوایی در هر لحظه از رابطه $\phi = \phi_{max} \cos \omega t$ پیروی می کند.

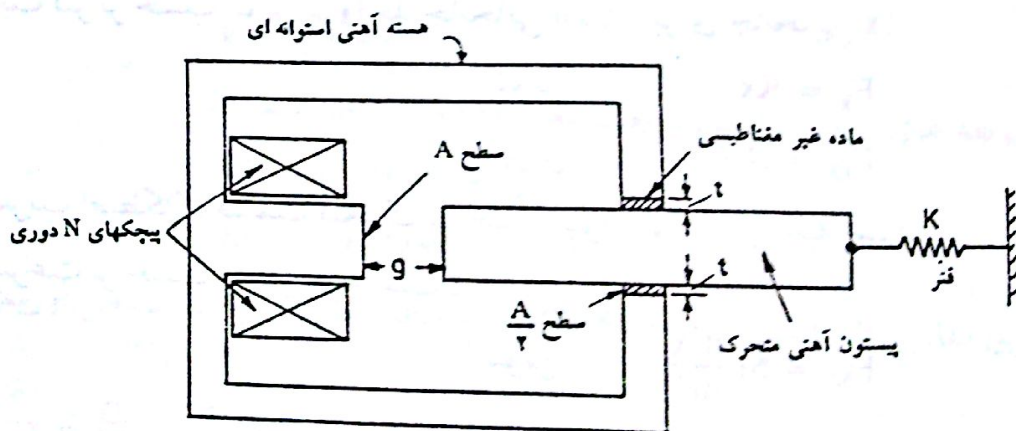
پیستون حرکت ساده نوسانی دارد.

الف) برای نیروی مغناطیسی F_e که پیستون آهنی را به حرکت در می آورد، عبارتی بر حسب ϕ_{max} و ω و t بدست آورید.

ب) برای ولتاژ سیم پیچ عبارتی بصورت تابعی از ϕ_{max} و N و ω و t بدست آورید.

ج) برای حرکت پیستون آهنی رابطه دیفرانسیلی بر حسب ϕ_{max} و ω و t بدست آورید.

د) معادله دیفرانسیلی قسمت (ج) را برای حالت کار ماندگار سینوسی حل کنید.



شکل ۲-۴۰: پیستون مغناطیسی - مثال ۲-۲۱

حل: الف) فرض کنیم پیستون آهنی بر اثر نیروی الکترومغناطیسی F_e جابجایی کوچکی داشته باشد. در اینصورت طول فاصله هوایی به $(g-x)$ می رسد و مقاومت مغناطیسی در اینحالت $\mathcal{R}_1 = \frac{-xg}{\mu_0 A}$ خواهد بود. مقاومت مغناطیسی ماده غیر مغناطیسی که بین پیستون آهنی و سیلندر آهنی قرار گرفته است برابر است با:

$$\mathcal{R}_2 = \frac{2t}{\mu_0 A}$$

$$\therefore \text{مقاومت مغناطیسی کل} = \mathcal{R} = \left(\frac{g-x}{\mu_0 A} - \frac{2t}{\mu_0 A} \right)$$

$$\therefore \text{نیروی مغناطیسی: } F_e = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{g-x}{\mu_0 A} + \frac{2t}{\mu_0 A} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \phi^2 \frac{1}{\mu_0 A}$$

$$\phi = \phi_{\max} \cos \omega t$$

$$\therefore F_e = \frac{1}{2} \phi_{\max}^2 \frac{1}{\mu_0 A} \cos^2 \omega t = \frac{1}{4} \frac{\phi_{\max}^2}{\mu_0 A} (1 + \cos 2\omega t)$$

(ب)

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt} (N\phi_{\max} \cos \omega t)$$

$$\therefore e = \omega N \phi_{\max} \sin \omega t$$

ج) نیروی مغناطیسی F_e باید از نیروهای ۱- فنری ۲- اصطکاکی ۳- نیروی شتاب دهنده جرم M غلبه کند.

K ثابت فنر بر حسب نیوتن بر واحد جابجایی است. برای جابجایی x :

$$F_k = Kx \quad \text{نیوتن}$$

$$F_D = D \frac{dx}{dt} \quad \text{نیوتن}$$

D ضریب اصطکاکی قسمت متحرک بر حسب نیوتن بر متر بر ثانیه است. $\frac{dx}{dt}$ سرعت بر حسب متر بر ثانیه است.

$$F_M = M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{نیوتن}$$

M جرم پیستون آهنی متحرک بر حسب کیلوگرم است و $\frac{d^2 x}{dt^2}$ شتاب بر حسب متر بر مجذور

ثابت است. لذا رابطه موازنه چنین نیروها خواهد شد.

$$F_e = F_M + F_D + F_k$$

$$\frac{1}{4} \frac{\phi_m^2}{\mu_0 A} (1 + \cos 2\omega t) = M \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots + Kx$$

جواب معادله فوق شامل یک تابع تکمیلی و انتگرال ویژه است.

تابع تکمیلی قسمت گذرای پاسخ و انتگرال ویژه پاسخ حالت ماندگار معادله بالا را مشخص می کند. اما در اینجا فقط پاسخ حالت ماندگار مطلوب است و به تابع تکمیلی احتیاجی نیست بنابراین:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + Kx = \frac{\phi_m^2}{4\mu_0 A} (1 + \cos 2\omega t) \quad (2-96)$$

سمت راست معادله فوق تابع نیروست و می بینیم که شامل یک مولفه ثابت و یک مولفه با فرکانسی برابر دو برابر فرکانس اصلی است. بنابراین پاسخ حالت ماندگار هم باید مولفه های مشابهی داشته باشد. براین اساس پاسخ حالت ماندگار معادله (2-96) را بصورت زیر می نویسیم:

$$x = P + Q \cos 2\omega t \quad (2-97)$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\omega \sin 2\omega t \quad \text{حال:}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -4\omega^2 \sin 2\omega t$$

با جایگذاری مقادیر x و $\frac{d^2 x}{dt^2}$ در رابطه (2-96)، P و Q را بدست می آوریم:

$$-4\omega^2 QM \cos 2\omega t + KP + KQ \cos 2\omega t = C(1 + \cos 2\omega t) \quad (2-98)$$

$$C = \frac{\phi_m^2}{4\mu_0 A}$$

با مقایسه مولفه های سمت راست و چپ معادله (2-98) خواهیم داشت:

$$KP = C \Rightarrow P = \frac{C}{K}$$

$$KQ - 4\omega^2 QM = C \Rightarrow Q = \frac{C}{K - 4\omega^2 M}$$

با جایگذاری مقادیر P و Q در رابطه (2-97) پاسخ حالت ماندگار را بدست می آوریم:

$$x = \frac{C}{K} + \frac{C \cos 2\omega t}{K - 4\omega^2 M} = \frac{\phi_m^2}{4\mu_0 AK} \left[1 + \frac{K \cos 2\omega t}{K - 4\omega^2 M} \right]$$

و اگر قسمت گذاری پاسخ هم مورد نیاز باشد باید مولفه های $A_1 e^{-i/T_1}$ و $A_2 e^{-i/T_2}$ را به پاسخ حالت ماندگار فوق اضافه کرد.

۲-۸ مثالهای حل شده

هدف این بخش حل مسائل نمونه در خصوص اصول تبدیل انرژی الکترومکانیکی می باشد.

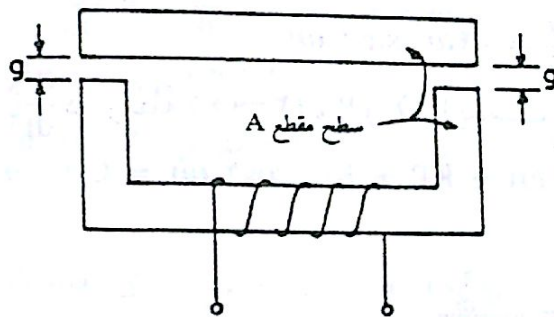
مثال ۲.۲۲

القاگری از هسته مغناطیسی با دو فاصله هوایی با طول مساوی g طبق شکل ۲-۴۱ تشکیل شده است. سیم پیچی تحریک ۱۰۰۰ دور دارد $A = 5\text{cm} \times 5\text{cm}$ و $g = 1\text{cm}$ است. هسته ضریب نفوذی نهایت داشته و از شکستگی شار صرف نظر می شود.

الف: ضریب القاء سیم پیچی را پیدا کنید. در حالتی که جریان سیم پیچی $5A$ باشد انرژی مغناطیسی ذخیره شده در القاء گر و نیروی وارد بر جوشن را پیدا کنید.

ب: در حالی که جریان سیم پیچی در $5A$ ثابت بماند انرژی الکتریکی تحویلی توسط منبع در صورتی که طول فاصله هوایی از 1cm به 0.5cm کاهش یابد محاسبه کنید.

ج: برای بند ب کار مکانیکی انجام گرفته را پیدا کنید.



شکل ۱-۴۱

حل: الف: برای دو فاصله هوایی سری مقاومت مغناطیسی برابر است با:

$$\mathcal{R} = \frac{2g}{\mu_0 A}$$

ضریب القاء سیم پیچی $L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{N^2 \mu_0 A}{2g} = \frac{a}{2g}$

$$= \frac{1000^2 \times (4\pi \times 10^{-7}) \times (0.05)^2}{2 \times 0.01}$$

$$= 0.15708 \text{ H}$$

$$a = \pi \times 10^{-3}$$

که:

$$= \frac{1}{2} L T^2$$

انرژی ذخیره شده در القاء گر:

$$= \frac{1}{2} \times 0.15708 (5^2) = 1/9635 \text{ W-sec(J)}$$

برای محاسبه نیروی وارد بر جوشن اگر جوشن با اندازه x حرکت کند به طوریکه طول فاصله هوایی $(g-x)$ شود:

$$L = \frac{N^2 \mu_0 A}{2(g-x)} = \frac{a}{2(g-x)}$$

$$W_{fld} = \frac{1}{2} L_x i^2 = \frac{1}{2} \frac{a}{2(g-x)} i^2$$

انرژی ذخیره شده

$$F_e = \frac{\partial W_{fld}(i,x)}{\partial x} = \frac{1}{4} i^2 \frac{a}{(g-x)^2}$$

نیروی وارد بر جوشن:

$$= \frac{1}{4} (5)^2 \frac{\pi \times 10^{-3}}{(0.01)^2} = 196/35 \text{ N}$$

ب: انرژی الکتریکی ورودی در حرکت با جریان ثابت:

$$W_e = (\psi_2 - \psi_1) I$$

$$= \{ [L_x \text{ طول فاصله هوایی وقتی } 1 \text{ cm است}] - [L_x \text{ وقتی طول فاصله هوایی به } 0.5 \text{ cm میرسد}] \} I^2$$

$$= \frac{\pi \times 10^{-3}}{2} \left[\frac{1}{0.005} - \frac{1}{0.01} \right] 5^2 = 3/927 \text{ W-sec}$$

ج: کار مکانیکی انجام یافته:

$$= \int_0^{0.05} F_e dx = \frac{1}{4} i^2 a \int_0^{0.05} \frac{1}{(g-x)} dx$$

$$= \frac{1}{4} (25) (\pi \times 10^{-3}) \left| \frac{1}{g-x} \right|_0^{0.05}$$

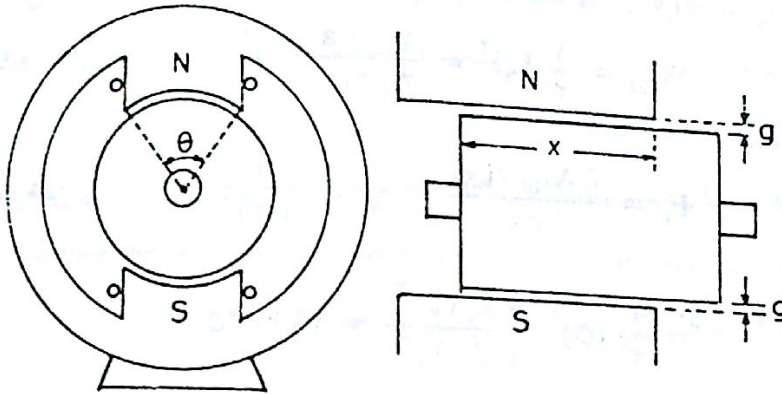
$$= 1/9635 \text{ W-sec}$$

مثال ۲.۲۳

آرمیچر یک ماشین d.c دو قطبی طبق شکل ۲-۴۲ عمداً به طور محوری جابجا شده است. برای $\theta = 110^\circ$ و $g = 0.4 \text{ cm}$ چگالی شار فاصله هوایی $T = 0.5 \text{ T}$ قطر آرمیچر $= 30 \text{ cm}$ نیروی محوری که آرمیچر را بداخل استاتور می کشد تا با سازه میدان هم امتداد می شود پیدا کنید. حل: انرژی ذخیره شده مغناطیسی در واحد حجم $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$ است. انرژی ذخیره شده در دو فاصله هوایی برابر است با:

$$W_{fld} = [\text{چگالی انرژی}] [\text{حجم دو فاصله هوایی}]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \left[\frac{D}{2} \theta \cdot x \cdot g \cdot 2 \right]$$



شکل ۲-۴۲

نیروئی که تمایل دارد آرمیچر را هم امتداد کند برابر است با:

$$F_d = \frac{\partial W_{fld}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} D \cdot \theta \cdot g$$

$$\frac{1}{2} \frac{0.5^2 \times 0.3 \times 110 \times \pi \times 0.4 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 180} = 229/17 \text{ N}$$

مسائل :

۲-۱: (الف) مزایای استفاده از روش انرژی میدان برای تجزیه تحلیل دستگاههای مبدل انرژی چیست ؟
 (ب) اصول تبدیل انرژی را شرح دهید . با در نظر گرفتن انواع انرژیهای معمول مدل مبدلهای انرژی الکترومکانیکی را بدست آورید .

(ج) نشان دهید که عکس العمل میدان مغناطیسی پیوند دهنده در سیستم الکتریکی یا مکانیکی لازمه فرآیند تبدیل انرژی در سیستم های الکترومکانیکی است .

۲-۲: (الف) نمودار بلوکی کلی یک دستگاه مبدل انرژی الکترومکانیکی را بطور کامل رسم کرده و شرح دهید .
 (ب) در یک سیستم مغناطیسی تک تحرک انرژی مغناطیسی ذخیره شده را بر حسب مقاومت مغناطیسی بدست آورید .

۲-۳: (الف) در یک مدار مغناطیسی خطی روابط زیر برای انرژی مغناطیسی ذخیره شده W_{fld} و شبه انرژی W'_{fld} برقرار است .

$$W_{fld} = W'_{fld} = \frac{1}{2} \mathcal{F} \phi = \frac{1}{2} \psi i = \frac{1}{2} \phi^2 \mathcal{R} = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{\Lambda} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} Li^2 \quad \text{ژول}$$

نشان دهید که چگالی انرژی مغناطیسی ذخیره شده W_{fld} ، مترمکعب / ژول $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$ است .

(ب) یک ژنراتور شنت dc دارای مشخصات زیر است :

۱۰kW و ۱۴۴۰ rpm و ثابت زمانی $\frac{L_f}{R_f}$ برای سیم پیچ میدان آن ۰/۲ ثانیه است . در شرایط کار عادی تلفات $I_f^2 R_f$ سیم پیچ میدان ۴۰۰ وات است . انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی را که سیم پیچ میدان در شرایط کار عادی تولید می کند بدست آورید .

[جواب ۴۰ وات ثانیه]

۲-۴: ثابت کنید که در یک سیستم الکترومغناطیسی کار مکانیکی انجام شده در زمان حرکت آرمیچر برابر است با سطح محصور بین دو منحنی مغناطیسی مربوط به وضعیتهای باز و بسته آرمیچر در محورهای $i - \psi$.

۲-۵: (الف) قضیه کار مجازی را شرح دهید و نشان دهید نیروی مغناطیسی F_e از رابطه زیر پیروی می کند :

$$F_e = - \frac{\partial W_{fld}}{\partial x} (\psi, x) = - \frac{\partial W_{fld}}{\partial x} (\phi, x)$$

(ب) در یک دستگاه رابطه $x^3 \cdot \mathcal{F} = \phi^3$ بین \mathcal{F} m.m.f و شار ϕ و مختصات مکانی x برقرار است .

$$\frac{1}{\gamma} (L_d + L_q) + \frac{1}{\gamma} (L_d - L_q) \cos 2\theta_r \quad \text{[جواب الف]}$$

$$T_e = -\frac{1}{\gamma} I_m^2 (L_d - L_r) \sin (2\omega_r t - 2\delta) + \frac{1}{\gamma} \sin (2\omega_r t + 2\omega t - 2\delta) + \frac{1}{\gamma} \sin (2\omega_r t + 2\omega t - 2\delta) \quad \text{ب)}$$

$$T_{e(av)} = \frac{1}{\gamma} I_m^2 (L_d - L_q) \sin 2\delta \quad \text{ج)}$$

۲.۹: سیم پیچ استاتور و روتور دارای پارامترهای زیر هستند:

$$r_r = 2/5 \Omega$$

$$r_r = 3 \Omega$$

$$L_s = 0.03 \text{ H}$$

$$L_r = 0.12 \text{ H}$$

$$M_{sr} = 0.06 \cos \theta_r$$

θ_r زاویه فضایی بین محورهای سیم پیچ روتور و استاتور است.

دو سیم پیچ بصورت موازی بهم وصل شده اند و روتور در موقعیت $\theta_r = 90^\circ$ قرار دارد. در زمان $t = 0$ سیم پیچ ها به منبع ولتاژ ۳۰ ولت dc وصل می شوند و مقدار جریان اولیه صفر است.

الف) i_s و i_r را بصورت تابعی از زمان بدست آورید.

ب) برای گشتاور مغناطیسی T_e عبارتی بر حسب زمان بدست آورید.

$$i_s = 12 (1 - e^{-83/31}) \quad i_r = 10 (1 - e^{-25t}) \quad \text{[جواب الف]}$$

$$[T_e = -7/2 (1 - e^{-83/31} - e^{-25t} + e^{-108/31})] \quad \text{ب)}$$

۲.۱۰: در یک ماشین الکتریکی دوازده یا فاصله هوایی یکنواخت، استاتور و روتور را با دو صفحه با توزیع جریانهای سطحی سینوسی جایگزین می کنیم. پارامترهای ماشین عبارتند از:

$$L_s = 1 \text{ H} \quad \text{و} \quad L_r = 0.3 \text{ H} \quad \text{و} \quad M_{sr} = 0.5 \cos \theta_r$$

و θ_r زاویه نسبی بین صفحات جریان است.

از مقاومت استاتور و روتور صرف نظر کنید، استاتور توسط جریان $I_m \cos \omega t$ تحریک می شود. در حالی که روتور اتصال کوتاه شده است:

الف) با فرض اینکه ماشین در حالت سکون است، گشتاور لحظه ای تولید شده را بصورت تابعی از θ_r و t بدست آورید.

ب) اگر روتور بتواند بچرخد در چه زاویه ای خواهد ایستاد؟

[راهنمایی ب): $T_{e(av)} = 0.2083 I_m^2 \sin 2\theta_r$ برای $\theta_r = 0^\circ$ داریم: $T_{e(av)} = 0$ و برای $\theta_r = 1^\circ$ گشتاور مثبت است سپس گشتاور به افزایش θ_r منجر می شود یعنی گشتاور روتور را از موقعیت $0^\circ = \theta_r$ دور می کند. بنابراین یک انحراف کم از موقعیت $\theta_r = 0^\circ$ ، روتور را از این موقعیت دور می کند و لذا موقعیت $\theta_r = 0^\circ$ ناپایدار است.]

برای $\theta_r = 90^\circ$ داریم: $T_e(av) = 0$ و برای $\theta_r = 89^\circ$ گشتاور مثبت است و بنابراین متمایل به افزایش دادن زاویه θ_r به مقداری بیشتر از 89° می شود یعنی گشتاور متمایل به افزایش زاویه از 89° به 90° را دارد. برای $\theta_r = 91^\circ$ گشتاور منفی است و بنابراین موجب کاهش زاویه از 91° به 90° می شود. یعنی بین $\theta_r = 0^\circ$ و $\theta_r = 180^\circ$ تعادل پایدار در موقعیت زاویه 90° است. [

$$\frac{1}{2} I_m^2 \sin 2\theta_r (1 + \cos 2\omega_t) \quad \text{[جواب: الف]}$$

ب) بین $\theta_r = 0^\circ$ و 180° تعادل پایدار در موقعیت زاویه ای 90° است. بین $\theta_r = 180^\circ$ و 270° وضعیت تعادل پایدار 270° است [

۲.۱۱ الف) در سیستم مغناطیسی انتقالی دو تحریکه عبارتی برای نیروی مغناطیسی تولید شده بیاید.

ب) دو سیم پیچ با هسته هوایی و با محورهای مغناطیسی در راستای یکدیگر دارای پارامترهای زیر هستند:

$$L_1 = 0.4 \text{ H} \quad L_2 = 0.2 \text{ H} \quad M_{12} = M_{21} = 0.1 e^{-4x} \text{ (H)}$$

X فاصله بین دو سیم پیچ است.

نیروی مغناطیسی تولید شده را وقتی که $I_1 = 10 \text{ A}$ و $I_2 = 5 \text{ A}$ هستند محاسبه کنید. آیا این نیرو منجر به کاهش X می شود یا افزایش آن؟ مقدار نیرو را برای $X = 2/5 \text{ cm}$ بدست آورید.

$$\text{[جواب: نیوتن } (-2.0 e^{-4x}) \text{ و کاهش } X \text{ و } (-18/0.97) \text{ نیوتن]}$$

۲.۱۲ $r_s = 40 \Omega$ ضریب القاء خودی و متقابل ماشین دوار دو تحریکه عبارتند از:

$$r_r = 2 \Omega \quad L_s = 0.16 \text{ H}$$

$$L_r = 0.4 + 0.2 \cos 2\theta_r \quad M_{sr} = 0.08 \cos \theta_r$$

θ_r زاویه فضایی بین محورهای سیم پیچ است. روتور با سرعت ۱۰۰۰ رادیان بر ثانیه می چرخد. برای

$$i_s = 10 \text{ A dc} \quad i_r = 2 \text{ A dc}$$

الف) عبارتی برای ولتاژ لحظه ای اعمال شده به سیم پیچ های استاتور و روتور بدست آورید.

ب) عبارتی برای گشتاور مغناطیسی و توان الکتریکی متناظر با آن بدست آورید.

در قسمتهای الف و ب همین مقادیر را به ازای $\theta_r = 90^\circ$ محاسبه کنید.

[جواب:

$$400 - 16 \sin \theta_r + 384 \text{ V} \quad 4 - 8 \sin 2\theta_r - 80 \sin 2\theta_r - 76 \text{ V} \quad \text{الف)}$$

$$(-0.08 \sin 2\theta_r - 1/6 \sin \theta_r) \quad (-1/6 \text{ N.m}) \quad (-8 \sin 2\theta_r - 160 \sin \theta_r) \quad \text{ب)}$$

$$\text{وات } (-160) \text{ و } 1$$

۲.۱۳ الف: انرژی میدان و شبه انرژی را تعریف کنید. مفهوم شبه انرژی در استخراج گشتاور با نیرو در

وسيله تبدیل انرژی الکترومکانیکی را بیان کنید .

ب: عملاً تمام وسائط تبدیل انرژی از میدان مغناطیسی به عنوان محیط واسطه استفاده می کنند تا میدان الکتریکی استدلال کنید .

۲.۱۴ الف: ثابت کنید که انرژی و شبه انرژی در یک مدار مغناطیسی خطی با عبارات مشابهی بیان می شوند .
ب: یک ماشین الکتریکی دارای استاتور استوانه ای و رتور با قطب برجسته است درستی یا نادرستی عبارات زیر را قضاوت کنید .

۱- گشتاور مقاومت مغناطیسی وقتی تولید می شود که سیم پیچی تحریک روی رتور باشد . ۲-
گشتاور مقاومت مغناطیسی وقتی تولید می شود که سیم پیچی تحریک روی استاتور باشد .

۳- وقتی استاتور و رتور هر دو حاوی سیم پیچی تحریک باشند گشتاور الکترومغناطیسی تولید می شود .

۴- وقتی استاتور و رتور هر دو حاوی سیم پیچی تحریک باشند گشتاور الکترومغناطیسی و گشتاور مقاومت مغناطیسی هر دو تولید می شوند .

[جواب ۱: نادرست ۲- درست ۳- نادرست ۴- درست]

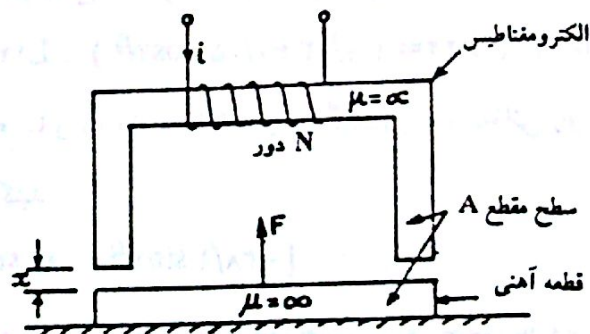
۲.۱۵ شکل ۲-۴۳ الکترومغناطیسی را برای بالا بردن یک قطعه آهن نشان می دهد. اگر $N = 1000$ و $A = 1 \text{ cm}^2$ و $x = 0.5 \text{ mm}$ باشد مطلوبست محاسبه:

الف: ضریب القاء سیم پیچی

ب: انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

ج: نیروی F اعمال شده بر قطعه آهن ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$)

[جواب: الف: 0.125664 H ب: 0.062832 J ج: 125.664 N]

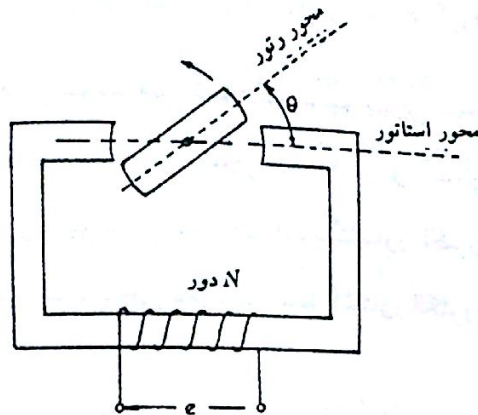


شکل ۲-۴۳

۲.۱۶ شکل ۲-۴۴ سیستم الکترومکانیکی یک تحریکه ای را نشان می دهد که دارای هسته استاتور حاوی N دور سیم و هسته رتور بدون سیم پیچی می باشد ولتاژ $V = 200\sqrt{2} \sin 1000\pi t$ به دو سر سیم پیچی

استاتور اعمال می شود در حالی که رتور در $100\pi \text{ rad/s}$ می چرخد. وضعیت زاویه ای θ چنین است: $\delta + \theta = 100\pi t$ که δ وضعیت رتور در لحظه صفر است. سطح رتور طوری شکل یافته که مقاومت مغناطیسی فاصله هوایی آن چنین است:

$$\frac{R_d + R_q}{2} - \frac{R_q - R_d}{2} \cos 2\theta$$



شکل ۲-۴۴

الف: عبارت عددی برای شار هسته ϕ ناشی از ولتاژ اعمال شده بر حسب زمان بنویسید (از مقاومت سیم پیچی، پراکندگی و شکستگی شار صرف نظر کنید) $N = 1000$ است.

ب: گشتاور متوسط تولیدی را بصورت تابعی از δ بنویسید در صورتی که $R_d = R_q = 10^{-4}/2\pi$ و δ [جواب: الف: $100\pi t \cos 0.9002$ و ب: $1/61258 \sin \delta \text{ Nm}$]

۲.۱۷ الف: فرق بین سیستمهای مغناطیسی یک تحریکه و دو تحریکه چیست؟

ب: در یک ماشین گردان دو تحریکه ضرائب القاء عبارتند از:

$$L_{11} = (1/1 + 0.4 \cos 2\theta), \quad L_{22} = (0.03 + 0.05 \cos 2\theta), \quad L_{12} = 0.2 \cos \theta$$

جریانهای تحریک $i_1 = 8 \text{ A}$ و $i_2 = 50 \text{ A}$ اند. رابطه گشتاور - جابجائی زاویه ای را بدست آورید. عبارت مورد استفاده را استخراج کنید.

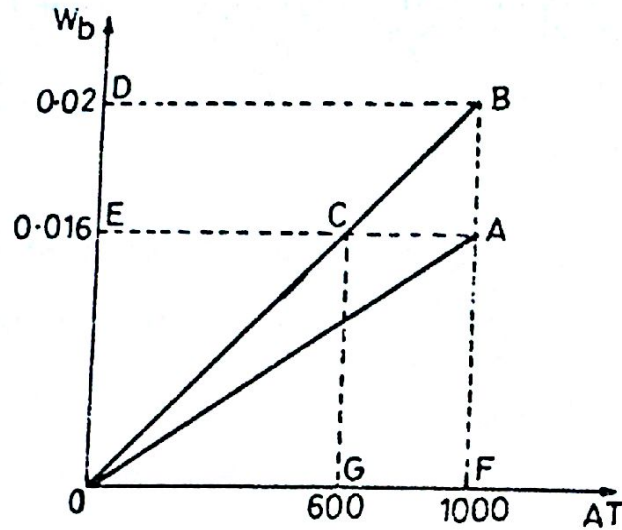
$$[\text{جواب ب: } -38/1 \sin 2\theta - 80 \sin \theta \text{ Nm}]$$

۲.۱۸ برای رله الکترومغناطیسی منحنی های مغناطیسی برای حالت باز بسته جوشن طبق شکل ۲-۴۵ خطی است. در جوشن باز فاصله هوایی 1 cm است.

الف: برای حرکت خیلی کند جوشن کار مکانیکی انجام شده در حرکت جوشن از باز به حالت بسته را محاسبه کنید. این انرژی از کجا می آید.

ب: بند الف را در حالتی که آرمیچر خیلی سریع حرکت می کند تکرار کنید .
 ج: مقدار متوسط نیروی مغناطیسی وارد بر جوشن را ۱ - در حرکت کند جوشن ۲ - در حرکت سریع جوشن
 محاسبه کنید .

[جواب الف: $2J$ و ب: $3/2 J$ ج: $200 N$ و $220 N$]



شکل ۲-۴۵

۲.۱۹ عبارتی برای گشتاور سیستم مغناطیسی دو تحریکه دارای قطب برجسته در استاتور و رتور بدست آورید. ثابت کنید تغییرات دیفرانسیلی جریان سهمی در تولید گشتاور مغناطیسی ندارد.