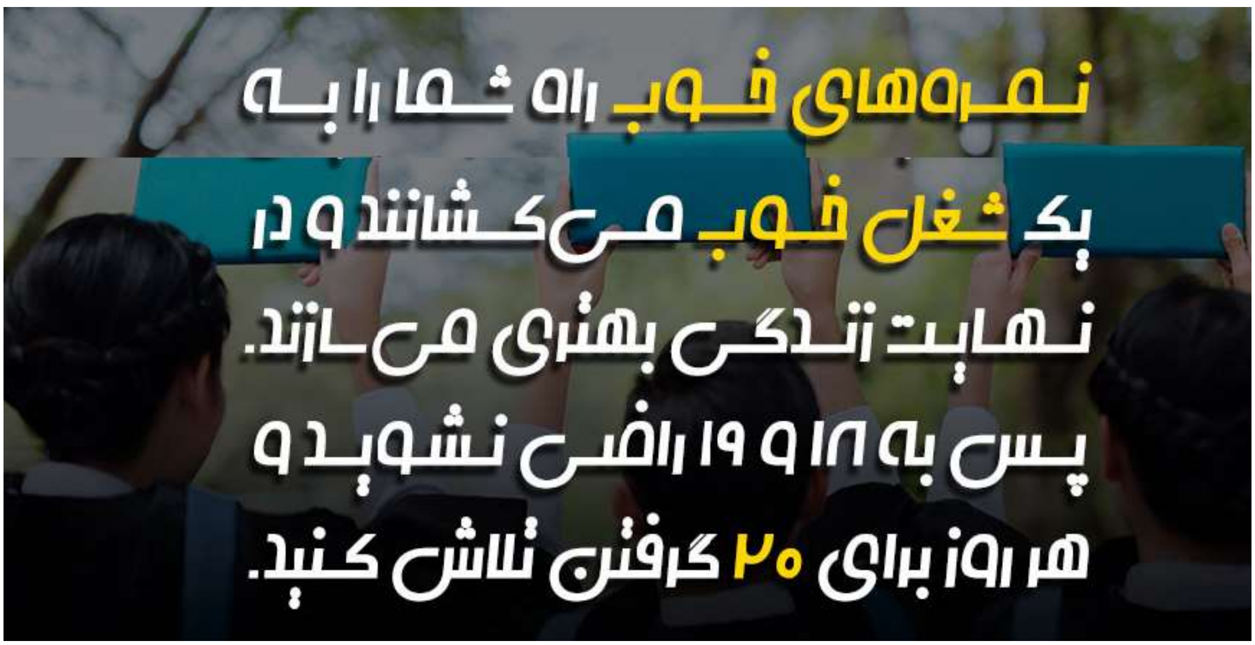
بسمه تعالی

سه جلسه اول درس ریاضیات مهندسی

حمید شریفیان



ترم دوم تحصیلی ۹۸–۹۹

آشنایی با نظریه اعداد مختلط :

$x^2+1=0 \longrightarrow$ جواب حقیقی ندارد. $\longrightarrow$ نظریه‌ای جدید به نام نظریه‌ی اعداد مختلط

تعریف : عدد مختلط یک زوج مرتب از اعداد حقیقی x و y است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$* \ \mathbb{C}=\{x+iy \mid x,y\in R,\ i^2=-1\}$$

اگر $z=x+iy$ عددی مختلط و عضو مجموعه‌ی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد، x را قسمت حقیقی و y را قسمت موهومی آن می‌نامیم:

$$z\in\mathbb{C} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=\mathrm{Re}(z) \\ y=\mathrm{Im}(z) \end{array} \right.$$

خواص اعداد مختلط : اگر $z_1=x_1+iy_1$ ، $z_2=x_2+iy_2$ و $z_3=x_3+iy_3$ فرض شوند، داریم:

1. $z_1=z_2 \Longrightarrow x_1=x_2\,,\ y_1=y_2$ تساوی دو عدد مختلط

2. $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$ جمع و تفریق دو عدد مختلط

3. $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$ ضرب دو عدد مختلط

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2+i^2y_1y_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

4. $\overline{z_1}=x_1-iy_1$ مزدوج عدد مختلط

5. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ ,\ z_2\neq 0$ تقسیم دو عدد مختلط

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\times\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

6. $z_1+z_2=z_2+z_1$ جابجایی عمل جمع

7. $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ شرکت‌پذیری عمل جمع

8. $z_1z_2=z_2z_1$ جابجایی عمل ضرب

9. $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ شرکت‌پذیری عمل ضرب

10. $z_1(z_2 \pm z_3) = z_1 z_2 \pm z_1 z_3$ توزیع‌پذیری عمل ضرب

11. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$ مزدوج مجموع و تفاضل

12. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ مزدوج حاصلضرب

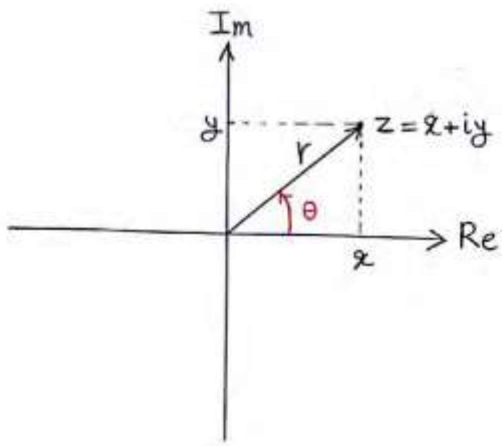
13. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \quad , z_2 \neq 0$ مزدوج حاصل تقسیم

14. $Re(z_1) = \frac{z_1 + \overline{z}_1}{2} = x_1$ قسمت حقیقی عدد مختلط

15. $Im(z_1) = \frac{z_1 - \overline{z}_1}{2i} = y_1$ قسمت موهومی عدد مختلط

16. $|z_1| = \sqrt{z_1 \cdot \overline{z}_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ اندازه‌ی عدد مختلط

نمایش قطبی اعداد مختلط :



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{cases}$$

* $z = x + iy$ نمایش دکارتی عدد مختلط

* $z = r\cos\theta + i r\sin\theta \Rightarrow z = re^{i\theta} = r\angle\theta$ نمایش قطبی عدد مختلط

قرارداد : * $-\pi < \theta \leq \pi$

* $\overline{z} = re^{-i\theta} = r\angle -\theta$

نکته: θ را آرگومان عدد مختلط z می‌نامیم:

* $Arg(z) = \theta \quad , \quad arg(z) = Arg(z) \pm 2k\pi \; ; k = 0, 1, 2, \dots$

نکته: $\cos\theta + i\sin\theta = cis\,\theta = e^{i\theta}$ رابطه‌ی اویلر

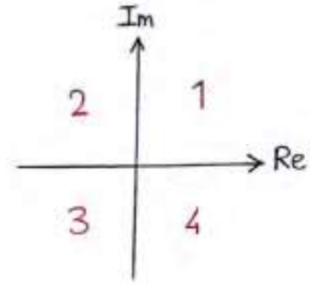
مثال:

$1+i=\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{+1}{+1}=\frac{\pi}{4}$ ناحیه ی اول

$1-i=\sqrt{2}\angle\frac{-\pi}{4}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{-1}{1}=\frac{-\pi}{4}$ ناحیه ی چهارم

$-1+i=\sqrt{2}\angle\frac{3\pi}{4}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{-1}=\frac{3\pi}{4}$ ناحیه ی دوم

$-1-i=\sqrt{2}\angle\frac{-3\pi}{4}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{-1}{-1}=\frac{-3\pi}{4}$ ناحیه ی سوم



نکته: عملیات ضرب و تقسیم در نمایش قطبی اعداد مختلط به سادگی انجام می‌شود:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \theta_1+\theta_2$

2. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\angle\theta_1-\theta_2$, $z_2\neq 0$

محاسبه ی ریشه ی nام عدد مختلط: اگر $z=r\angle\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $w=R\angle\phi=R(\cos\phi+i\sin\phi)$ باشد، w را ریشه ی nام عدد مختلط z می‌نامیم، هرگاه داشته باشیم:

$* \; w=z^{\frac{1}{n}}$

$$w=z^{\frac{1}{n}} \Rightarrow w^n=z \Rightarrow (Re^{i\phi})^n=re^{i\theta} \Rightarrow R^n e^{in\phi}=re^{i\theta}$$

$$\Rightarrow R^n[\cos(n\phi)+i\sin(n\phi)]=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow * \; R=r^{\frac{1}{n}}$$

$$\cos(n\phi)+i\sin(n\phi)=\cos\theta+i\sin\theta \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sin(n\phi)=\sin\theta \\ \cos(n\phi)=\cos\theta \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow * \; \phi=\frac{\theta+2k\pi}{n} \;; k=0,1,2,\ldots,n-1$$

مثال: ریشه ی چهارم عدد $z=1$ را بدست آورید.

$$w^4=z=1(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow w=\sqrt[4]{1}\left[\cos\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right)\right]$$

$$k=0,1,2,3$$

$k=0 \Longrightarrow w_1=1$ $\qquad$ $k=2 \Longrightarrow w_3=-1$

$k=1 \Longrightarrow w_2=i$ $\qquad$ $k=3 \Longrightarrow w_4=-i$

مثال: معادله‌ی $z^4+2i=0$ را حل کنید.

$$z^4+2i=0 \Longrightarrow z^4=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$z=\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)\right] \; ; \; k=0,1,2,3$$

مثال: معادله‌ی $z^2-(5+i)z+8+i=0$ را حل کنید.

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-(5+i) \\ c=8+i \end{cases}$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5+i}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5+i}{2}\right)^2-8-i}$$

$$=\frac{5+i}{2}\pm\sqrt{-2+\frac{3}{2}i}=\frac{5+i}{2}\pm(0.5+1.5i)=\begin{cases}3+2i \\ 2-i\end{cases}$$

$$-2+\frac{3}{2}i=2.5e^{2.5i}$$

$$\sqrt{-2+\frac{3}{2}i}=\sqrt{2.5}\left[\cos\left(\frac{2.5+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2.5+2k\pi}{2}\right)\right]=\pm(0.5+1.5i)$$

$$k=0,1$$

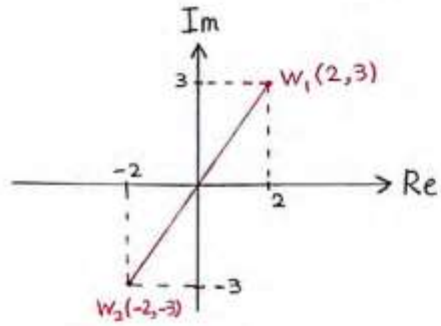
P.3

تمرین: مقادیر ریشه‌ی عبارات زیر را یافته و در صفحه‌ی مختلط نمایش دهید.

1. $\sqrt{-5+12i} \Rightarrow w=\sqrt{-5+12i} \Rightarrow w=z^{\frac{1}{2}}$

$z=-5+12i=13e^{1.97i}$

$$w=\sqrt{13}\left[\cos\left(\frac{1.97+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{1.97+2k\pi}{2}\right)\right]=\begin{cases}2+3i & ;k=0\\ -2-3i & ;k=1\end{cases}$$



2. $\sqrt[4]{-5+12i} \Rightarrow w=\sqrt[4]{-5+12i} \Rightarrow w=z^{\frac{1}{4}}$

$z=-5+12i=13e^{1.97i}$

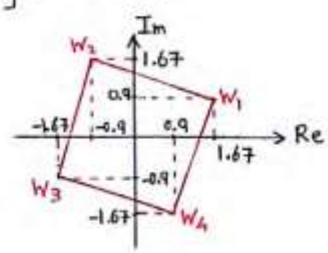
$$w=\sqrt[4]{13}\left[\cos\left(\frac{1.97+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{1.97+2k\pi}{4}\right)\right];k=0,1,2,3$$

$k=0 \Rightarrow w_1=1.67+0.9i$

$k=1 \Rightarrow w_2=-0.9+1.67i$

$k=2 \Rightarrow w_3=-1.67-0.9i$

$k=3 \Rightarrow w_4=0.9-1.67i$



3. $\sqrt[4]{-1} \Rightarrow w=\sqrt[4]{-1} \Rightarrow w=z^{\frac{1}{4}}$

$z=-1=e^{i\pi}$

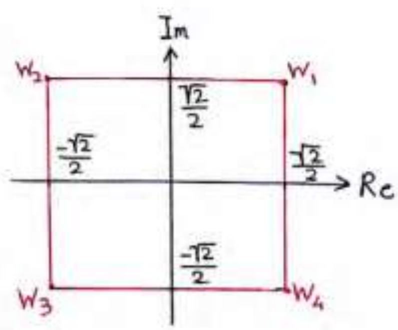
$$w=\sqrt[4]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right];k=0,1,2,3$$

$k=0 \Rightarrow w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=1 \Rightarrow w_2=\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=2 \Rightarrow w_3=\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=3 \Rightarrow w_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$



4. $\sqrt[5]{1+i} \implies w=\sqrt[5]{1+i} \implies w=z^{\frac{1}{5}}$

$z=1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$w=\sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)\right];\ k=0,1,2,3,4$

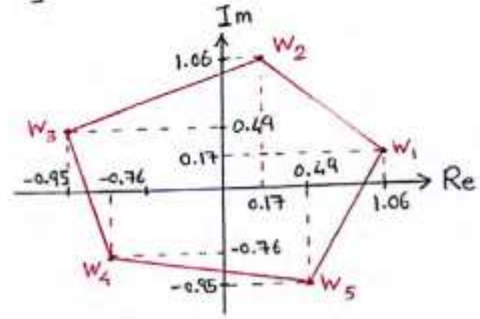
$k=0 \implies w_1=1.06+0.17i$

$k=1 \implies w_2=0.17+1.06i$

$k=2 \implies w_3=-0.95+0.49i$

$k=3 \implies w_4=-0.76-0.76i$

$k=4 \implies w_5=0.49-0.95i$



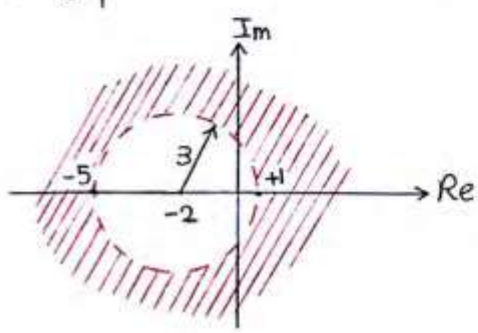
تمرین: نواحی زیر را در صفحه‌ی مختلط نشان دهید.

1. $|z+2|>3$

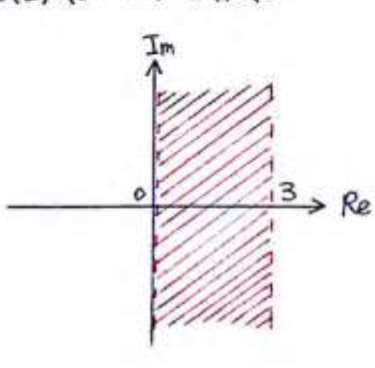
نکته: $|z-z_0|=\rho$

$$\left.\begin{array}{l} z=x+iy \\ z_0=x_0+iy_0 \end{array}\right| \implies |(x-x_0)+i(y-y_0)|=\rho \implies \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho \implies (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

معادله‌ی دایره به مرکز $z_0(x_0,y_0)$ وشعاع ρ.

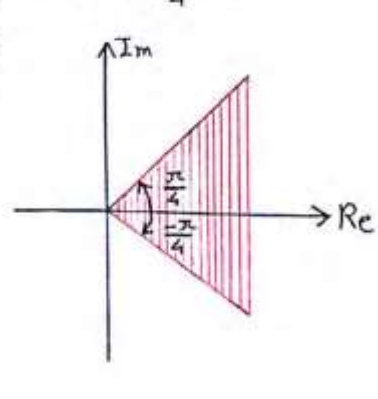


2. $0<Re(z)<3 \implies 0<x<3$



3. $|Arg(z)|\leqslant\frac{\pi}{4} \implies |\theta|\leqslant\frac{\pi}{4} \implies$

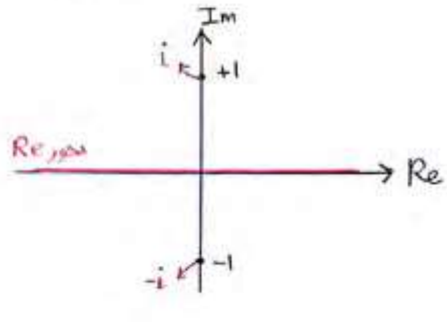
$-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$



P.4

4. $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right|=1 \implies \dfrac{|z+i|}{|z-i|}=1 \implies |z+i|=|z-i|$

مکان هندسی نقاطی از صفحه‌ی مختلط که فاصله‌ی آن‌ها از i و $-i$ برابر باشد.



$|z+i|=|z-i| \Rightarrow$

$|x+iy+i|=|x+iy-i| \Rightarrow$

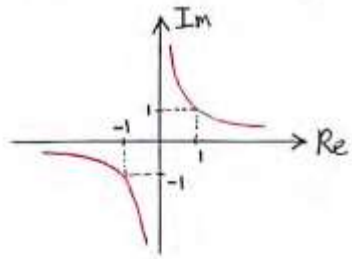
$x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2 \implies$

$(y+1)^2=(y-1)^2 \Rightarrow$

$y^2+2y+1=y^2-2y+1 \implies 2y=-2y \Rightarrow y=0$

5. $\mathrm{Im}(z^2)=2$

$z=x+iy \implies z^2=(x^2-y^2)+i(2xy) \implies \mathrm{Im}(z^2)=2xy=2 \rightarrow xy=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x}$



تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

1. $z^2+z+1-i=0$

$$\left|\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=1-i \end{array}\right. \qquad z=\frac{-1\pm\sqrt{-3+4i}}{2}=-0.5\pm(0.5+i) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} z_1=i \\ z_2=-1+i \end{array}\right.$$

$$\sqrt{\frac{-3}{4}+i}=\sqrt{\frac{5}{4}}\left[\cos\left(\frac{2.214+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2.214+2k\pi}{2}\right)\right]=\pm(0.5+i) \quad ; k=0,1$$

$\mathrm{Arg}\left(\frac{-3}{4}+i\right)=2.214$

$\left|\frac{-3}{4}+i\right|=\frac{5}{4}$

مشتق توابع مختلط: مشتق تابع $f(z)$ در نقطه‌ی $z=z_0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$*\ f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

مثال: مشتق‌پذیری توابع مختلط زیر را بررسی کنید.

a) $f(z)=\overline{z}$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(z+\Delta z)}-\overline{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z}+\overline{\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=$$

$$\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\\ \to(0,0)}}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}1 & ;\ \Delta x\to 0,\ \Delta y=0\\ -1 & ;\ \Delta x=0,\ \Delta y\to 0\end{cases}$$

چون حد فوق موجود نمی‌باشد، مشتق‌پذیر نیست.

b) $f(z)=|z|^2$

نکته: $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)}-z\cdot\overline{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\overline{\Delta z}+\overline{z}\Delta z+|\Delta z|^2}{\Delta z}$$

$$=z\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\overline{z}+0=\begin{cases}z+\overline{z} & ;\ \Delta x\to 0,\ \Delta y=0\\ -z+\overline{z} & ;\ \Delta x=0,\ \Delta y\to 0\end{cases}$$

حد وجود ندارد، مشتق‌پذیر نیست.

خواص مشتق توابع مختلط:

1. $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$
2. $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$
3. $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$

توابع تحلیلی:

تعریف: تابع $f(z)$ را در دامنه‌ی D تحلیلی گوییم هرگاه $f(z)$ در تمامی نقاط D تعریف‌شده و مشتق‌پذیر باشد.

تابع $f(z)$ در نقطه‌ی $z=z_0$ تحلیلی است هرگاه در یک همسایگی از آن تحلیلی باشد.

* تمامی توابع چندجمله‌ای مانند $f(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ که در آن n عدد طبیعی و $a_n , \dots , a_1 , a_0$ اعداد مختلط هستند، در همه جا تحلیلی اند.

* تمامی توابع گویا مانند $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ که در آن $P(z)$ و $Q(z)$ چندجمله‌ای هایی برحسب z هستند، در همه جا به جز ریشه های $Q(z)$ تحلیلی اند.

* توابع $\sin z$ ، $\cos z$ و e^z در همه جا تحلیلی اند.

* اگر $f(z)$ و $g(z)$ توابعی تحلیلی باشند، ترکیب آن‌ها $(f \circ g(z))$ نیز تابعی تحلیلی خواهد بود.

قضیه ی 1 (کوشی- ریمان): فرض کنید تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در یک همسایگی از نقطه ی z تعریف شده و پیوسته باشد و در خود z مشتق پذیر باشد. آن‌گاه مشتقات جزئی مرتبه ی اول u و v در آن نقطه وجود دارد و در شرایط زیر که به شرایط کوشی- ریمان معروف است صدق می‌کند:

$$* \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

قضیه ی 2 (کوشی- ریمان): هرگاه توابع پیوسته و حقیقی $u(x,y)$ و $v(x,y)$ از دو متغیر حقیقی x و y دارای مشتقات جزئی مرتبه ی اول پیوسته باشند که در دامنه ی D در معادلات کوشی - ریمان صدق کنند، تابع مختلط $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در D تحلیلی است.

روش های مشتق‌گیری از توابع مختلط: مشتق تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را به یکی از روش های زیر می‌توان محاسبه نمود:

1. استفاده از تعریف اصلی مشتق

2. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

3. $f'(z)=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$

نکته: برقراری معادلات کوشی- ریمان در یک نقطه شرط لازم ولی غیرکافی برای مشتق پذیر بودن یک تابع مختلط در آن نقطه است. شرط کافی پیوسته بودن تابع مختلط در همسایگی آن نقطه است. بنابراین عدم برقراری معادلات کوشی- ریمان در یک نقطه، عدم مشتق پذیری تابع مختلط مورد نظر در نقطه ی مذکور را نتیجه می‌دهد.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(z)=\mathrm{Re}(z)=x$ را بررسی کنید.

$u(x,y)=x \quad , v(x,y)=0$

$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=1 \ , \ v_y=\frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow u_x \neq v_y \Rightarrow$ شرایط کوشی- ریمان برقرار نیست پس تابع مشتق پذیر نیست.

شرایط کوشی ریمان درفرم قطبی:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}\times 2x\times(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

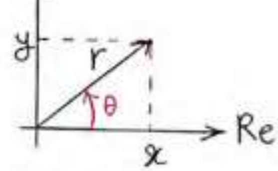
$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$* \; f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$



شرایط کوشی - ریمان: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \cos\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}=\sin\theta\cdot\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}$

$$\Rightarrow \; * \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r}=\frac{-1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

شرایط کوشی-ریمان
در فرم قطبی

مثال: درمورد تحلیلی بودن تابع $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$ نظر دهید.

$$u(x,y)=e^x\cos y$$
$$v(x,y)=e^x\sin y$$

$$\begin{cases} u_x=e^x\cos y \\ v_y=e^x\cos y \end{cases} \Rightarrow u_x=v_y \qquad \begin{cases} v_x=e^x\sin y \\ u_y=-e^x\sin y \end{cases} \Rightarrow v_x=-u_y$$

شرایط کوشی-ریمان برقرار است. پس تابع تحلیلی می‌باشد (u و V توابعی پیوسته هستند.)

تعریف نقطه‌ی تکین: نقطه‌ی تکین نقطه‌ای است که تابع در آن نقطه تحلیلی نیست ولی حداقل در یک همسایگی از آن تحلیلی می‌باشد.

اگر تابع مختلط $f(z)$ در تمامی نقاط به جز نقاط خاص تحلیلی باشد، به آن نقاط، نقاط تکین اطلاق می‌شود.

نکته: اگر تابعی هیچ جا تحلیلی نباشد، هیچ نقطه‌ی تکینی نخواهد داشت.

مثال: نقاط تکین تابع $f(z)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})}$ را بدست آورید.

تابع فوق در تمامی نقاط به جز ریشه‌های مخرج و نقاطی که تابع تعریف نشده است، تحلیلی است.

$$\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)=0 \Rightarrow \frac{\pi}{z}=\pm k\pi \Rightarrow z=\frac{1}{\pm k} \; ; k=1,2,3,\dots$$

$$z=0 \quad (k\to\infty)$$

نقاط تکین

قضیه‌ی معادله‌ی لاپلاس: فرض کنید تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشد، آن‌گاه u و v در D دارای مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته بوده و در معادله‌ی لاپلاس صدق خواهد کرد.

$$* \left| \begin{array}{l} \nabla^2 u = u_{xx}+u_{yy}=0 \\ \\ \nabla^2 v = v_{xx}+v_{yy}=0 \end{array} \right.$$

تابع همساز: هر تابعی که دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم بوده و معادله‌ی لاپلاس صدق کند، تابع همساز نامیده می‌شود؛ بنابراین u و v توابعی همساز هستند.

مزدوج همساز: اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشد، آن‌گاه v را مزدوج همساز u می‌نامند.

محاسبه‌ی مزدوج همساز: فرض کنید $u(x,y)$ معلوم بوده و $v(x,y)$ مجهول باشد. آن‌گاه از رابطه‌ی $u_x=v_y$، تابع v را به صورت $v(x,y)=\int u_x(x,y)\,dy$ بدست می‌آوریم. انتگرال مذکور تابعی به صورت $\phi(x)$ خواهد داشت. از رابطه‌ی $v_x=-u_y$ می‌توان $\phi(x)$ را تعیین کرد.

مثال: مزدوج همساز تابع $u(x,y)=\sin x\cosh y$ را بدست آورید.

$$u_x=\cos x\cosh y \xRightarrow{u_x=v_y} v(x,y)=\int u_x\,dy=\int \cos x\cosh y\,dy=\cos x\sinh y+\phi(x)$$

$$v_x=-u_y \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v_x=-\sin x\sinh y+\phi'(x) \\ \\ u_y=\sin x\sinh y \end{array} \right. \Rightarrow \phi'(x)=0 \Rightarrow \phi(x)=c$$

$$v(x,y)=\cos x\sinh y+c$$

مثال: اگر $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$ باشد، مزدوج همساز تابع u و تابع تحلیلی $f(z)$ را بدست آورید.

* پس از این‌که $f(z)$ را براساس تابع u و مزدوج همسازآن (v) نوشتیم، برای محاسبه‌ی $f(z)$ به صورت تابعی از z، به جای x ها z و به جای y ها صفر قرار می‌دهیم.

$$f(z)=f(x+iy)\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x\to z \\ y\to 0\end{array}\right. \Rightarrow f(z)=f(x)$$

$$u_x=2^x\cos(y\ln 2)\ln 2$$

$$v(x,y)=\int 2^x\cos(y\ln 2)\ln 2 = 2^x\frac{\sin(y\ln 2)}{\ln 2}\ln 2+\phi(x)=2^x\sin(y\ln 2)+\phi(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x=2^x\sin(y\ln 2)\ln 2+\phi'(x) \\ u_y=-2^x\sin(y\ln 2)\ln 2\end{array}\right| \xrightarrow{v_x=-u_y} \phi'(x)=0 \Rightarrow \phi(x)=c$$

$$v(x,y)=2^x\sin(y\ln 2)+c$$

$$f(z)=2^x\cos(y\ln 2)+i(2^x\sin(y\ln 2)+c) \xrightarrow{\left|\begin{array}{l} x\to z \\ y\to 0\end{array}\right.} \left|\begin{array}{ll} f(z)=2^z+ic & ;\ c\in\mathbb{R} \\ f(z)=2^z+c' & ;\ c'\in\mathbb{C}\end{array}\right.$$

* $w=f(z)=2^z$

$$\ln w=\ln 2^z \Rightarrow \ln w=z\ln 2 \Rightarrow e^{\ln w}=e^{z\ln 2}\Rightarrow w=e^{(x+iy)\ln 2}$$

$$\Rightarrow w=e^{x\ln 2}\cdot e^{iy\ln 2}=e^{x\ln 2}\left[\cos(y\ln 2)+i\sin(y\ln 2)\right]\Rightarrow w=f(z)=2^x\left[\cos(y\ln 2)+i\sin(y\ln 2)\right]$$

تمرین: آیا توابع زیر همساز هستند؟ درصورت مثبت بودن جواب، مزدوج همساز هرکدام را بدست آورید.

1. $u(x,y)=2x(1-y)$

$$\left|\begin{array}{l} u_x=2(1-y) \Rightarrow u_{xx}=0 \\ u_y=-2x \Rightarrow u_{yy}=0\end{array}\right. \Rightarrow \nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (u \text{ همساز است.})$$

$$v(x,y)=\int u_x\,dy=\int 2(1-y)\,dy=2y-y^2+\phi(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x=\phi'(x) \\ u_y=-2x\end{array}\right| \Rightarrow \phi'(x)=2x \Rightarrow \phi(x)=x^2+c$$

$$v(x,y)=2y-y^2+x^2+c$$

2. $u(x,y)=y^3-3x^2y$

$$\left|\begin{array}{l} u_x=-6xy \Longrightarrow u_{xx}=-6y \\ u_y=3y^2-3x^2 \Longrightarrow u_{yy}=6y \end{array}\right. \Longrightarrow \nabla^2 u=-6y+6y=0$$

(u همساز است.)

$$v(x,y)=\int u_x\,dy=\int -6xy\,dy=-3xy^2+\phi(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x=-3y^2+\phi'(x) \\ u_y=3y^2-3x \end{array}\right| \Longrightarrow \phi'(x)=3x \Longrightarrow \phi(x)=\frac{3}{2}x^2+c$$

$$v(x,y)=-3xy^2+\frac{3}{2}x^2+c$$

تمرین: a و b را طوری تعیین کنید که توابع داده شده ی زیر همساز باشند.

1. $u=e^{2x}\cos(ay)$

$$u_x=2e^{2x}\cos(ay) \Longrightarrow u_{xx}=4e^{2x}\cos(ay)$$

$$u_y=-e^{2x}a\sin(ay) \Longrightarrow u_{yy}=-e^{2x}a^2\cos(ay)$$

$$\nabla^2 u=4e^{2x}\cos(ay)-e^{2x}a^2\cos(ay)=0 \Longrightarrow 4\cos(ay)=a^2\cos(ay) \Longrightarrow a^2=4 \Longrightarrow a=\pm 2$$

2. $u=\cos bx\cdot\sinh y$

$$u_x=-b\sin bx\cdot\sinh y \Longrightarrow u_{xx}=-b^2\cos bx\cdot\sinh y$$

$$u_y=\cos bx\cosh y \Longrightarrow u_{yy}=\cos bx\sinh y$$

$$\nabla^2 u=-b^2\cos bx\cdot\sinh y+\cos bx\sinh y=0 \Longrightarrow b^2=1 \Longrightarrow b=\pm 1$$

مثال: فرض کنید $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ باشد، چنانچه $v(x,y)$ مزدوج همساز این تابع بوده و $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ باشد، مطلوب است محاسبه‌ی $f'(i)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(z)=u_x+iv_x \\ \text{کوشی-ریمان}:\ v_x=-u_y \end{array}\right| \Longrightarrow f'(z)=u_x-iu_y$$

$$u_x=2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy)-2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$
$$u_y=-2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy)-2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$

P.8

$$z = x + iy = i \implies \begin{vmatrix} x=0 \\ y=1 \end{vmatrix}$$

$$f'(i) = 0 - i(-2e^{0-1^2}\cos 0 - 0) \implies f'(i) = 2e^{-1}i$$

نگاشت:

تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر بگیرید. از نقطه نظر هندسی، عملکرد این تابع را می‌توان به صورت یک نگاشت از صفحه‌ی مختلط $z(x,y)$ به صفحه‌ی مختلط $w(u,v)$ در نظر گرفت. به این معنا که تحت این تابع مختلط یک نقطه‌ی مشخص مانند (x_0,y_0) از صفحه‌ی z به یک نقطه‌ی مشخص مانند (u_0,v_0) در صفحه‌ی w منتقل می‌شود. به چنین رابطه‌ای نگاشت می‌گوییم.

نگاشت همدیس: نگاشتی که اندازه و جهت زاویه‌ی دو قوس هموار گذرنده از یک نقطه‌ی مشخص را حفظ می‌کند، نگاشتی همدیس در آن نقطه‌ی مشخص می‌نامند.

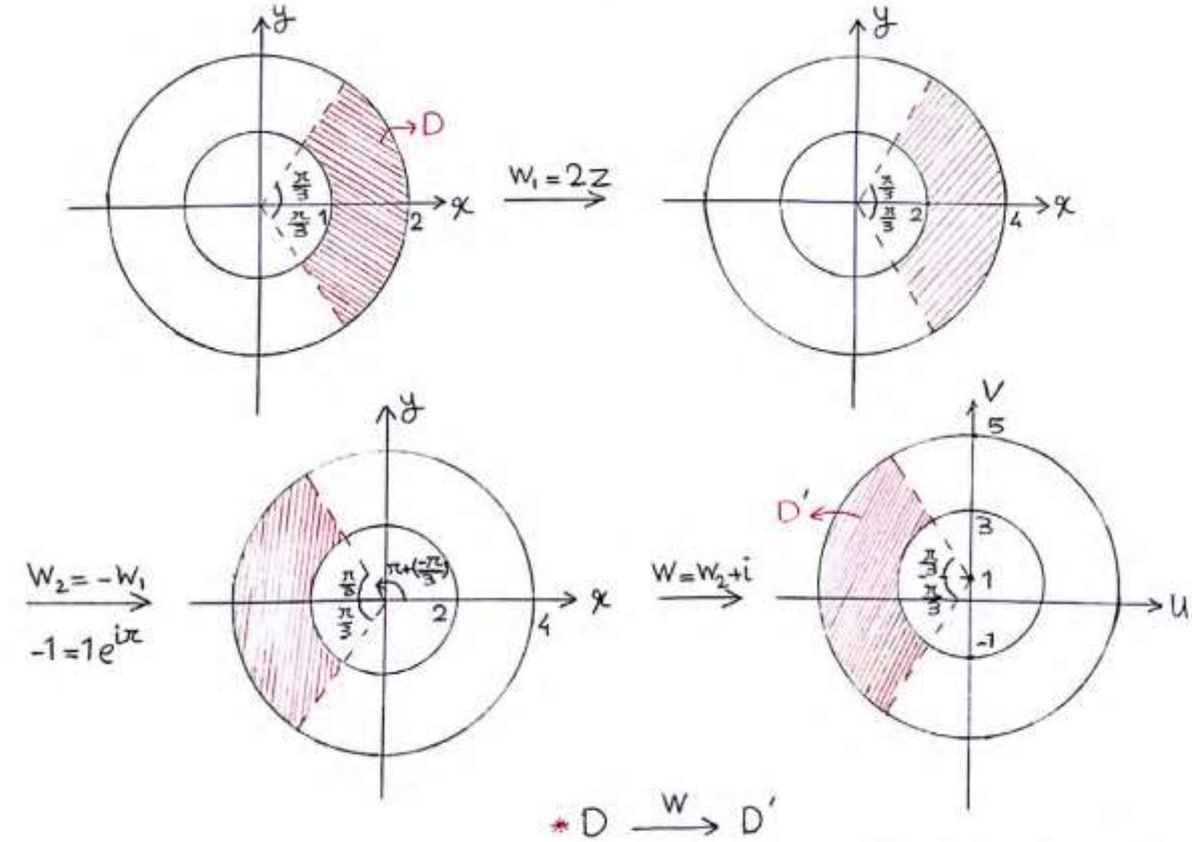
قضیه: اگر $f(z)$ در نقطه‌ی $z=z_0$ تحلیلی بوده و $f'(z_0)\neq 0$ باشد، آن‌گاه تابع $w=f(z)$ در نقطه‌ی $z=z_0$ نگاشتی همدیس است.

۱. نگاشت خطی:

$* \; w=az+b \quad ; \quad a,b\in\mathbb{C}$

با فرض $a=|a|e^{i\alpha}$، نگاشت خطی $w=az+b$ علاوه بر انقباض یا انبساط به اندازه‌ی $|a|$ و دوران به اندازه‌ی α در جهت مثلثاتی، باعث انتقال به اندازه‌ی b می‌شود. اگر $a\neq 0$ باشد، نگاشت خطی فوق در همه جا همدیس است.

مثال: نگاشت ناحیه‌ی $D=\{z \mid 1\leqslant|z|\leqslant 2;\ \frac{-\pi}{3}<Arg(z)<\frac{\pi}{3}\}$ را تحت رابطه‌ی $w=-2z+i$ بیابید.



$* \; D \xrightarrow{w} D'$

2. نگاشت توانی:

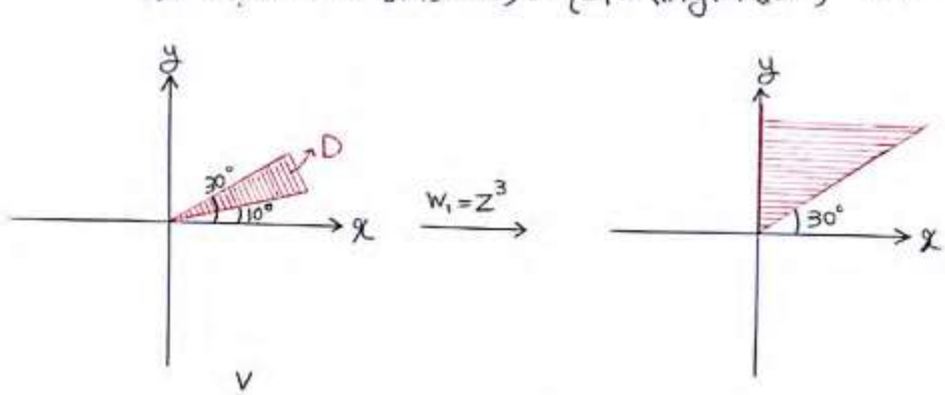
$* \; w = z^n \;;\; n \in \mathbb{N}$

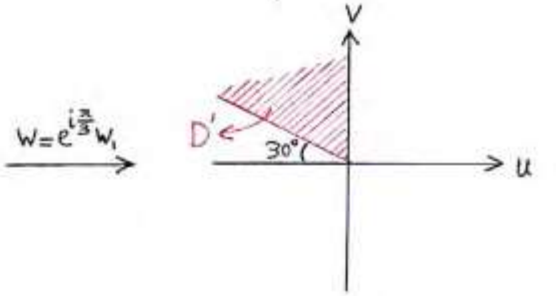
$z = re^{i\theta} \;,\; w = Re^{i\phi}$

$$w = z^n \Rightarrow Re^{i\phi} = r^n e^{in\theta} \Rightarrow * \left| \begin{array}{l} R = r^n \\ \\ \phi = n\theta \end{array} \right.$$

نگاشت توانی فوق به غیراز نقطه‌ی $z=0$ درهمه جا همدیس است.

مثال: نگاشت ناحیه‌ی $D = \{z \mid 10° \leq Arg(z) \leq 30°\}$ را تحت رابطه‌ی $w = e^{i\frac{\pi}{3}} z^3$ بدست آورید.





$* \; D \xrightarrow{w} D'$

$D' = \{w \mid 90° \leq Arg(w) \leq 150°\}$

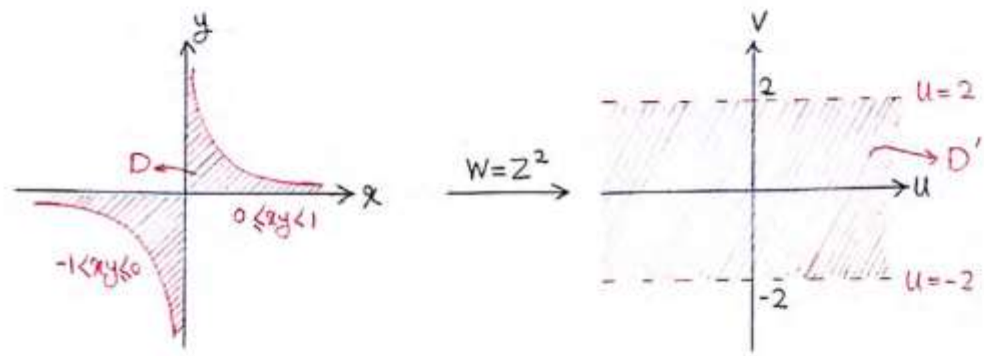
نکته: حالت خاص نگاشت توانی به صورت $w = z^2$ می‌باشد که درمختصات دکارتی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$z = x + iy \Rightarrow w = z^2 = (x+iy)^2 \Rightarrow * \; w = u + iv = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

دراین حالت نگاشت هذلولی $x^2 - y^2 = c_1$، خط $u = c_1$ ونگاشت هذلولی $2xy = c_2$، خط $v = c_2$ خواهد بود.

مثال: نگاشت ناحیه‌ی $-1 < xy < 1$ راتحت رابطه‌ی $w = z^2$ بدست آورید.

$$-1 < xy < 1 \Rightarrow -2 < 2xy < 2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2xy = 2 \Rightarrow u = 2 \\ \\ 2xy = -2 \Rightarrow u = -2 \end{array} \right.$$



3. نگاشت ریشه‌ی nام:

$$* \; W = \sqrt[n]{Z} \; ; \; n \in \mathbb{N}$$

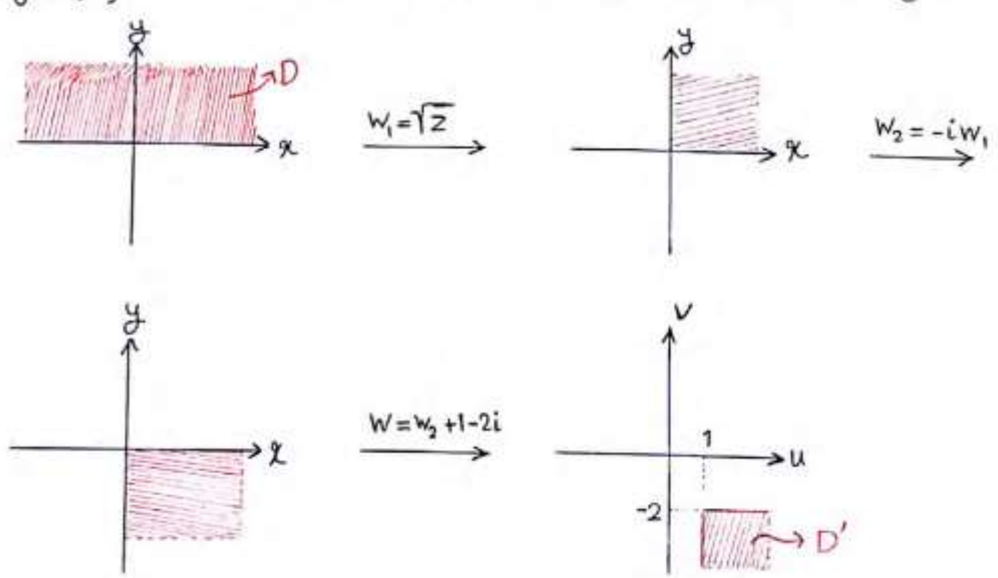
$$Z = re^{i\theta} \; , \; w = Re^{i\phi}$$

$$W = \sqrt[n]{Z} \Longrightarrow Re^{i\phi} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}} \Longrightarrow * \left| \begin{array}{l} R = \sqrt[n]{r} \\ \\ \phi = \dfrac{\theta}{n} \end{array} \right.$$

نگاشت ریشه‌ی فوق به غیر از $z = 0$ درهمه جا همدیس است.

مثال: نگاشت نیم‌صفحه‌ی فوقانی صفحه‌ی مختلط را تحت رابطه‌ی $w = -i\sqrt{z} + 1 - 2i$ بدست آورید.

$$D = \{ z \mid 0 \leq Arg(z) \leq \pi \}$$



۴. نگاشت کسری:

$$* \; W=\frac{1}{Z} \; ; \; Z \neq 0$$

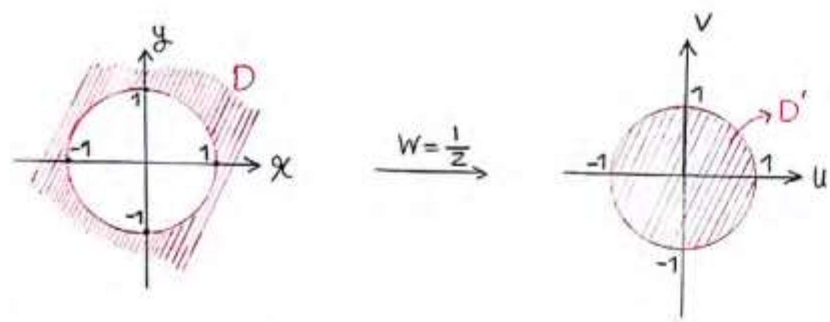
$$Z = re^{i\theta} , \; W = Re^{i\phi}$$

$$W=\frac{1}{Z} \Rightarrow Re^{i\phi} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \Rightarrow * \left| \begin{array}{l} R=\frac{1}{r} \\ \\ \phi = -\theta \end{array} \right.$$

نگاشت کسری فوق به غیر از $Z=0$ (که نگاشت نیست) در همه جا همدیس می‌باشد.

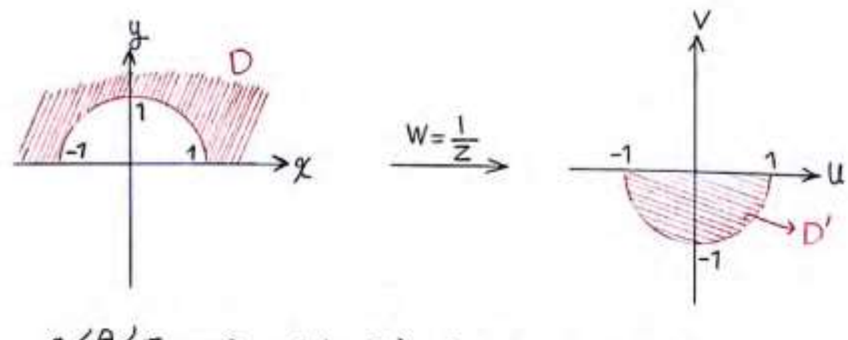
مثال: نگاشت هریک از نواحی زیر را تحت رابطه‌ی $W=\frac{1}{Z}$ بدست آورید.

1.



$$1 \leqslant r < \infty \Rightarrow \frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{r} > \frac{1}{\infty} \Rightarrow 0 < R \leqslant 1$$

2.



$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi \Longrightarrow -0 \geqslant -\theta \geqslant -\pi \Rightarrow -\pi \leqslant \phi \leqslant 0$$

در حالت کلی معادله‌ی یک دایره یا یک خط راست را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$* \; A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad (I)$$

نگاشت رابطه‌ی فوق تحت رابطه‌ی $W=\frac{1}{Z}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$W=\frac{1}{Z} \Rightarrow Z=\frac{1}{W} \Rightarrow x+iy = \frac{1}{u+iv} \times \frac{u-iv}{u-iv} \Rightarrow x+iy = \frac{u}{u^2+v^2} + i\,\frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ \\ y = \dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{array} \right. \quad (\mathrm{II})$$

با جایگذاری مقادیر x و y برحسب u و v مطابق رابطهٔ II در رابطهٔ I، رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$* \; D(u^2+v^2) + Bu - Cv + A = 0$$

ـ اگر $A \neq 0$ و $D \neq 0$ باشد، یعنی دایره از مبدأ عبور نمی‌کند. آن‌گاه نگاشت آن تحت رابطهٔ $w=\frac{1}{z}$ دایره‌ای می‌شود که از مبدأ نمی‌گذرد.

ـ اگر $A \neq 0$ و $D = 0$ باشد، یعنی دایره از مبدأ عبور می‌کند. آن‌گاه نگاشت آن تحت رابطهٔ $w=\frac{1}{z}$ خط راستی می‌شود که از مبدأ نمی‌گذرد.

ـ اگر $A = 0$ و $D \neq 0$ باشد، یعنی خط راست از مبدأ عبور نمی‌کند. آن‌گاه نگاشت آن تحت رابطهٔ $w=\frac{1}{z}$ دایره‌ای می‌شود که از مبدأ می‌گذرد.

ـ اگر $A = 0$ و $D = 0$ باشد، یعنی خط راست از مبدأ عبور می‌کند. آن‌گاه نگاشت آن تحت رابطهٔ $w=\frac{1}{z}$ خط راستی می‌شود که از مبدأ می‌گذرد.

ـ اگر $A=0$ و $B=0$ باشد، خواهیم داشت:

$$\underbrace{Cy + D = 0 \Longrightarrow y = \frac{-D}{C}}_{\text{خط راست}} \xRightarrow{w=\frac{1}{z}} D(u^2+v^2) - Cv = 0 \Longrightarrow u^2+v^2 - \frac{C}{D}v = 0$$

$$\Longrightarrow u^2+v^2 - \frac{C}{D}v + \left(\frac{C}{2D}\right)^2 - \left(\frac{C}{2D}\right)^2 = 0 \Longrightarrow u^2 + \left(v - \frac{C}{2D}\right)^2 = \left(\frac{C}{2D}\right)^2$$

* دایره‌ای به مرکز $(0, \frac{C}{2D})$ و شعاع $\frac{C}{2D}$ که از مبدأ می‌گذرد.

ـ اگر $A=0$ و $C=0$ باشد، خواهیم داشت:

$$\underbrace{Bx + D = 0 \Longrightarrow x = \frac{-D}{B}}_{\text{خط راست}} \xRightarrow{w=\frac{1}{z}} D(u^2+v^2) + Bu = 0 \Longrightarrow u^2+v^2 + \frac{B}{D}u = 0$$

$$\Longrightarrow u^2+v^2 + \frac{B}{D}u + \left(\frac{B}{2D}\right)^2 - \left(\frac{B}{2D}\right)^2 = 0 \Longrightarrow \left(u + \frac{B}{2D}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{B}{2D}\right)^2$$

* دایره‌ای به مرکز $(\frac{-B}{2D}, 0)$ و شعاع $\frac{B}{2D}$ که از مبدأ می‌گذرد.

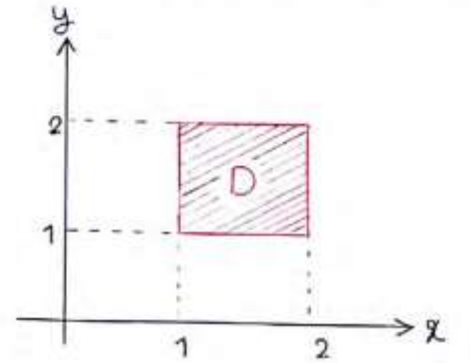
مثال: تصویر خط $y = x + \frac{1}{2}$ را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ بدست آورید.

$$x - y + \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{ll} A=0 & B=1 \\ C=-1 & D=\frac{1}{2} \end{array} \right. \xRightarrow{w=\frac{1}{z}} \frac{1}{2}(u^2+v^2) + u + v = 0 \Longrightarrow$$

$$u^2 + 2u + v^2 + 2v = 0 \Longrightarrow u^2 + 2u + 1 - 1 + v^2 + 2v + 1 - 1 = 0 \Longrightarrow (u+1)^2 + (v+1)^2 = 2$$

دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ و به مرکز $(-1,-1)$ که از مبدأ می‌گذرد.

مثال. نگاشت ناحیه‌ی $D=\{z \mid 1 \leqslant x \leqslant 2 , 1 \leqslant y \leqslant 2\}$ را تحت رابطه‌ی $w=\frac{1}{z}$ به دست آورید. $D \xrightarrow{w} D'$

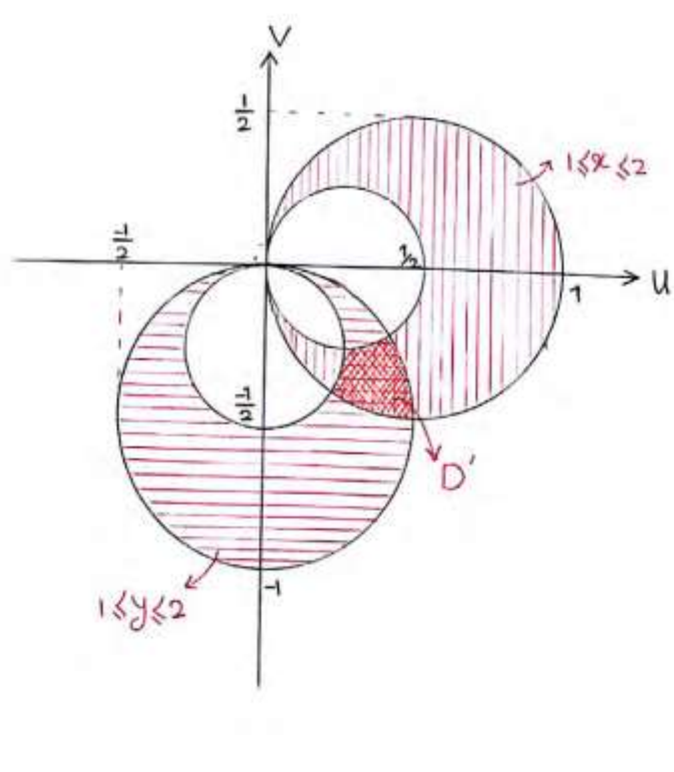


$$x=1 \xRightarrow{w} \left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$$

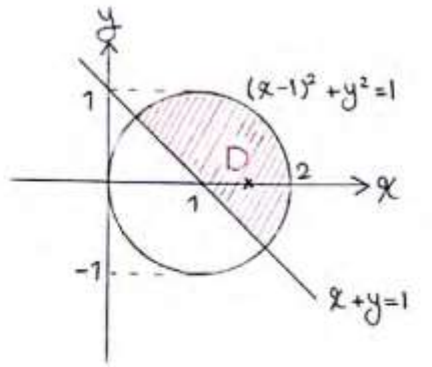
$y=0$ بافرض $\Longrightarrow 1 \leqslant r < \infty \Longrightarrow 0 < R \leqslant 1$ قسمت داخلی دایره بزرگ

$$x=2 \xRightarrow{w} \left(u-\frac{1}{4}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{16}$$

$y=0$ بافرض $\Longrightarrow 1 \leqslant r \leqslant 2 \Longrightarrow \frac{1}{2} \leqslant R \leqslant 1$ قسمت خارجی دایره کوچک



مثال: نگاشت ناحیه‌ی نشان داده شده را تحت رابطه‌ی $W=\frac{1}{Z}$ بدست آورید.



$$x+y-1=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{ll} A=0 & C=1 \\ B=1 & D=-1 \end{array}\right. \xRightarrow{W} u^2+v^2-u+v=0 \Rightarrow u^2-u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+v^2+v+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=$$

$$\Rightarrow \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2-2x=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{ll} A=1 & C=0 \\ B=-2 & D=0 \end{array}\right.$$

$$\xRightarrow{W} u=\frac{1}{2}$$

$$Z\left(\frac{3}{2},0\right) \xrightarrow{W} W\left(\frac{2}{3},0\right) \quad (x)$$

نقطه‌ی فرضی برای یافتن ناحیه‌ی D'