درس فیزیک الکترو مغاطیس

فصل اول آنالیز برداری

۱.۱. جبر برداری

بردارها کمیاتی هستند که با استفاده از بزرگی و جهت کاملاً مشخص می‌شوند در مقابل این کمیت‌ها، کمیتهای نرده‌ای قرار دارند که تنها با بزرگی مشخص می‌شوند.

بدلیل وجود جهت و راستا در تعریف یک بردار، جبر بردارها یعنی جمع ـ تفریق و ضرب آنها با کمیت‌های نرده‌ای متفاوت است. در ادامه جبر بردارها به اختصار برسی می‌شود.

۱ـجمع بردارها: حاصل جمع دو بردار بر طبق تعریف برداری است که مولفه‌های آن عبارتند از مجموع مولفه‌های مربوط به دو بردار. اگر حاصل جمع $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را با بردار $\vec{C}$ نشان دهیم داریم

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad (۱.۱)$$

$$C_x = A_x + B_x \quad C_y = A_y + B_y \quad C_z = A_z + C_z \qquad (۲.۱)$$

۲ـتفریق بردارها: عمل تفریق بردارها را به کمک جمع یک بردار با منفی بردار دیگر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \qquad (۳.۱)$$

$$D_x = A_x - B_x \quad D_y = A_y - B_y \quad D_z = A_z - B_z \qquad (۴.۱)$$

۳ـضرب بردارها: حالتهای زیر را می‌توان در نظر گرفت

الف) ضرب نرده‌ای (داخلی): بر طبق تعریف برابر است با

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (۵.۱)$$

مثال: زاویهٔ بین دو بردار $\vec{A} = ۳\vec{i} + ۴\vec{j}$ و $\vec{B} = ۶\vec{j} - ۸\vec{K}$ چقدر است؟

حل: داریم

$$\cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|\vec A||\vec B|} = \frac{۲۴}{۵ \times ۱۰} \simeq ۰/۵ \qquad \theta = ۶۰^\circ$$

$\vec n = \frac{\vec B}{|\vec B|}$

مثال: تصویر بردار $\vec A = \vec i - ۲\vec j + \vec K$ بر بردار $\vec B = ۴\vec i - ۴\vec j + ۷\vec K$ را تعیین کنید.

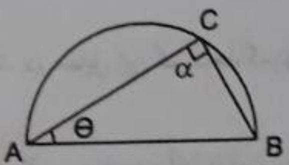
حل: برداریکهٔ در جهت بردار $\vec B$ بردار $\vec n = \frac{۴}{۹}\vec i - \frac{۴}{۹}\vec j + \frac{۷}{۹}\vec K$ می‌باشد و تصویر بردار $\vec A$ در امتداد $\vec B$ عبارت است از:

$|\vec B| = \sqrt{(16)+(16)+(49)} = \sqrt{۸۱} = ۹$

$$\vec A \cdot \vec n = (۱)(\frac{۴}{۹}) + (-۲)(-\frac{۴}{۹}) + (۱)(\frac{۷}{۹}) = \frac{۱۹}{۹}$$

مثال: با استفاده از ضرب داخلی دو بردار نشان دهید زاویه محاطی در یک نیم دایره، قائم است.

حل: اگر زاویه α برابر ۹۰° باشد باید حاصلضرب داخلی بردارهای تشکیل دهندهٔ این زاویه صفر شود با توجه به شکل می‌توان نوشت



$$\begin{aligned}\vec{AC} \cdot \vec{CB} &= \vec{AC}(\vec{CA} + \vec{AB}) \\ &= \vec{AC} \cdot \vec{CA} + \vec{AC} \cdot \vec{AB} \\ &- |AC|^۲ + |\vec{AC}||\vec{AB}|\cos\theta \\ &= -|AC|^۲ + |\vec{AC}||\vec{AB}|\frac{|\vec{AC}|}{|\vec{AB}|} = ۰\end{aligned}$$

چون حاصلضرب داخلی این دو بردار صفر شده است زاویه محاطی نیز ۹۰° است.

ب) ضرب برداری (خارجی): حاصل این ضرب بر خلاف ضرب نرده‌ای که یک کمیت نرده‌ای بود یک کمیت برداری است

$$\vec C = \vec A \times \vec B = |\vec A||\vec B|\sin\theta \quad \vec n \qquad (۶.۱)$$

بردار یکه $\vec n$ راستا و جهت بردار $\vec C$ را نشان می‌دهد بر طبق تعریف راستای $\vec n$ عمود بر صفحهٔ دو بردار $\vec A$ و $\vec B$ و جهت آن از قاعدهٔ زیر تعین می‌شود:

«اگر بردار $\vec A$ از طریق کوچکترین زاویه‌ای که با $\vec B$ می‌سازد به طرف $\vec B$ بچرخانیم و انگشتان خم شده دست راست در جهت این چرخش قرار گیرد شست دست راست جهت بردار یکهٔ $\vec n$ را نشان می‌دهد»

می‌توان مولفه‌های بردار $\vec C$ از دترمینان زیر محاسبه کرد:

$$\vec C = \vec A \times \vec B = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$C_x = (A_y B_z - A_z B_y)$$
$$C_y = (A_z B_x - A_z B_z) \quad C_z = (A_x B_y - A_y B_x) \qquad (۷.۱)$$

مثال: بردار یکه‌ای که بر دو بردار $\vec{A} = ۲\vec{i} - ۶\vec{j} - ۳\vec{k}$ و $\vec{B} = ۴\vec{i} + ۳\vec{j} - \vec{k}$ عمود است را تعین کنید.

حل: از حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ پاسخ بدست می‌آید

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۶ & -۳ \\ ۴ & ۳ & -۱ \end{vmatrix} = i(۶+۹) - j(-۲+۱۲) + k(۶+۲۴)$$

$$= ۱۵\hat{i} - ۱۰\hat{j} + ۳۰\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{۲۲۵+۱۰۰+۹۰۰} = \sqrt{۱۲۲۵} = ۳۵$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \mp(\frac{۳}{۷}\vec{i} - \frac{۲}{۷}\vec{j} + \frac{۶}{۷}\vec{k})$$

تمرین: اگر $\vec{A} = ۲\vec{i} + \vec{j} - ۳\vec{k}$ و $\vec{B} = \vec{i} - ۲\vec{j} + \vec{k}$ باشد برداری با اندازه ۵ را پیدا کنید که بر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود باشد.

پاسخ:

$$\mp\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

ج) ضرب سه گانهٔ نرده‌ای: به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\vec{D} = \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} \qquad (۸.۱)$$

حاصل عبارت فوق یک کمیت نرده‌ای می‌باشد که از دترمینان زیر قابل محاسبه است:

$$\vec{D} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_Z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

این ضرب دارای دو خاصیت قابل توجه زیر است

۱ـ حاصل این ضرب با تعویض جای ضرب برداری و نرده‌ای تغییر نمی‌کند

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} \qquad (۹.۱)$$

۲ـ حاصل این ضرب با تعویض جای بردارها با جایگشت دوره‌ای تغییر نمی‌کند

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} \qquad (۱۰.۱)$$

مثال: ثابت کنید $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$

حل: اگر $\vec{X} = \vec{A} \times \vec{B}$ در نظر بگیریم با استفاده از معادله (۱ − ۹) می‌توان نوشت:

$$\vec{X} \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{X} \times \vec{C}) \cdot \vec{D}$$

$$(A \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \{(A \times B) \times \vec{C}\} \cdot \vec{D}$$

$$= \{\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})\} \cdot \vec{D}$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot D) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

تمرین: ثابت کنید.

$$(\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C})(\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{A} \cdot \vec{a} & \vec{A} \cdot \vec{b} & \vec{A} \cdot \vec{c} \\ \vec{B} \cdot \vec{a} & \vec{B} \cdot \vec{b} & \vec{B} \cdot \vec{c} \\ \vec{C} \cdot \vec{a} & \vec{C} \cdot \vec{b} & \vec{C} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}$$

د) ضرب سه گانهٔ برداری: این ضرب از رابطهٔ زیر که به قاعدهٔ (بک ـ کب) معروف است محاسبه می‌شود و دارای کاربردهای فراوانی می‌باشد

۲

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \qquad (۱۱.۱)$$

مثال: نشان دهید اگر $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{C}$ و $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\times\vec{C}$ و $\vec{A}\neq ۰$ باشد آنگاه داریم $\vec{B}=\vec{C}$

حل: اگر دو طرف رابطهٔ $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\times\vec{C}$ را در $\vec{A}$ ضرب خارجی کنیم با استفاده از قاعده (بک ـ کب) می‌توان نوشت:

$$\vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{A})=\vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{A})$$

حال اگر از تساوی $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{C}$ استفاده کنیم داریم:

$$\vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{A})=\vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{B})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{A})$$
$$\vec{B}|A|^۲=\vec{C}|A|^۲ \quad\Rightarrow\quad \vec{B}=\vec{C}$$

(دقت کنید بردار $\vec{A}$ مخالف صفر می‌باشد)

مثال: اگر بردارهای $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و نرده‌ای P معلوم باشد و داشته باشیم $P=\vec{A}\cdot\vec{X}$ و $\vec{B}=\vec{A}\times\vec{X}$ بردار مجهول $\vec{X}$ را بر حسب $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{P}$ بیابید.

حل: چون $\vec{B}=\vec{A}\times\vec{X}$ می‌باشد می‌توان با استفاده از قاعدهٔ (بک ـ کب) نوشت:

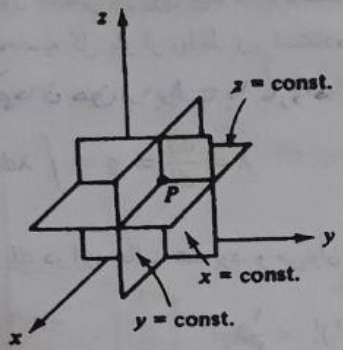
$$\vec{B}=\vec{A}\times\vec{X}\Rightarrow\vec{B}\times\vec{A}=\vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{X})$$
$$\vec{B}\times\vec{A}=\vec{X}(\vec{A}\cdot\vec{A})-\vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{X})$$
$$\vec{X}=\frac{P\vec{A}+\vec{B}\times\vec{A}}{a^۲}$$

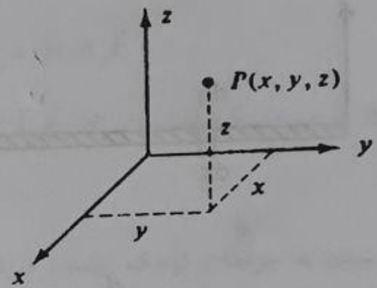
تمرین: ثابت کنید

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{B}\times(\vec{C}\times A)+\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})=۰$$

۲.۱. دستگاه‌های مختصات

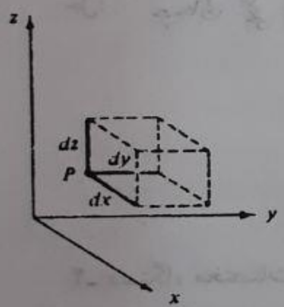
۱ـ دستگاه مختصات دکارتی: در این دستگاه هر نقطه P توسط سه مختصهٔ (x,y,z) بدست می‌آید. در این حالت هر نقطه را می‌توان از محل برخورد سه سطح عمود بر هم تعریف کرد. در دستگاه دکارتی سه سطح عبارت است از صفحه‌های نامحدود ثابت$=x$ ثابت$=y$ و ثابت$=z$.





بردارهای یکه نیز در این دستگاه مختصات ثابت بوده و هر بردار را می‌توان بر حسب این بردارها نوشت:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$



برای رسیدن به جزوهای کوچک (اِلمان) در این دستگاه، مختصهٔ p را به اندازهٔ $(\underbrace{x+dx}_{dx}, \underbrace{y+dy}_{dy}, \underbrace{z+dz}_{dz})$ نمو داد.

جزء خطی در این دستگاه، قطر جزء حجمی نشان داده در شکل بالاست

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$ (۱۲.۱) المان طول

جزءهای، سطحی نیز همانطورکه در شکل پیداست شش اِلمان بوده و هرکدام در یکی از جهت‌ها می‌باشد به عنوان مثال در راستا و جهت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ می‌توان نوشت

$$d\vec{s}_1 = dydz\vec{i}$$
$$d\vec{s}_2 = dxdz\vec{j}$$ (۱۳.۱) المان سطح
$$d\vec{s}_3 = dxdy\vec{k}$$

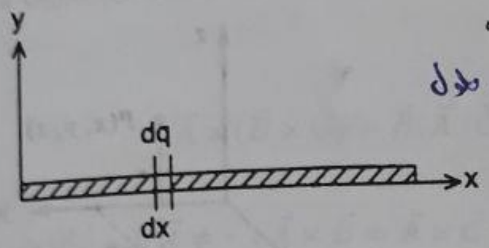
اِلمان حجم را می‌توان در هر دستگاه یک جعبهٔ مکعب مانند فرض کرد در این دستگاه داریم:

$$dV = dxdydz$$ (۱۴.۱) المان حجم

مثال: اگر چگالی بار الکتریکی (بار در واحد طول) یک میله به طول L برابر $\lambda = \lambda_0 x$ باشد مقدار کل بار میله چقدر است؟

$\lambda = \frac{dq}{dl}$ $\sigma = \frac{dq}{dA}$ $\rho = \frac{dq}{dV}$

حل: چون چگالی بار روی میله ثابت نیست باید برای محاسبه کل بار از روابط زیر استفاده کرد.



چگالی خطی برابر با بار واحد طول

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \Rightarrow q = \int \lambda dl$$

اِلمان dl در این حالت dx بود. و می‌توان نوشت:

$$q = \int_0^l \lambda_0 x dx = \lambda_0 (\frac{1}{2}x^2)|_0^l = \frac{1}{2}\lambda_0 l^2$$

مثال: مقدار بار واقع در حجم $0 \leqslant x \leqslant 1m$، $0 \leqslant y \leqslant 1$ و $0 \leqslant z \leqslant 1$ با چگالی بار حجمی $\rho = 30x^2y(\frac{c}{m^3})$ چقدر است؟

حل: چگالی حجمی بار $\rho = \frac{dq}{dV}$

$$\rho = \frac{dq}{dv} \Rightarrow q = \int \rho dv$$

$$q = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1} 30x^2y dxdydz$$

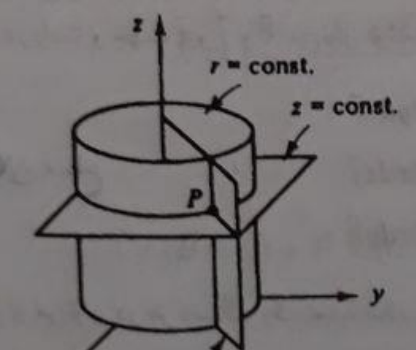
$$q = 5c$$

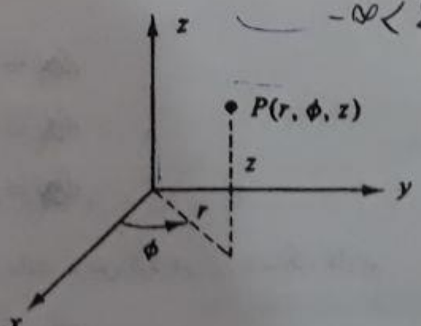
۲ـ دستگاه مختصات استوانه‌ای: در این دستگاه هر نقطهٔ p توسط سه مختصهٔ (r, ϕ, z) بدست می‌آید. در این حالت نیز هر نقطه را می‌توان از محل برخورد سه سطح عمود بر هم تعریف کرد. در دستگاه مختصات استوانه‌ای سه سطح عبارتند از صفحه‌های نامحدود ثابت$= z$ و نیم صفحه‌ای با ثابت$= \phi$ که لبهٔ ان روی محور zها قرار دارد و ثابت$= r$ که یک استوانه قائم است.

$0 \leqslant r < \infty$ r فاصله از محور z (بر محور z عمود است)

$0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ ϕ زاویه با محور xها

$-\infty < z < +\infty$



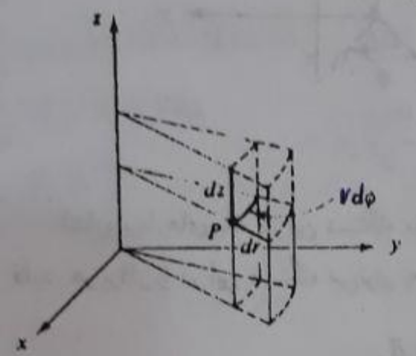


اندازه بردارهای یکه در این دستگاه مختصاب ثابت بوده اما جهت و راستای آنها (بجز مولفهٔ z) متغیر بوده و به مکان p بستگی دارد. هر برداریکه بر سطح مختصاتی خود عمود است و جهت آن به طرفی است که

مقدار مختصاتی آن افزایش پیدا کند.هر بردار را در این دستگاه به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\phi\vec{a}_\phi + A_z\vec{k}$$

بردارهای یکه در این دستگاه به‌صورت $\vec{r}_\circ$، $\vec{\phi}_\circ$، $\vec{k}$ نیز نوشته می‌شوند.



برای رسیدن به جزءهای کوچک (إلمان) در این دستگاه مختصهٔ p را به اندازهٔ $(\underbrace{r+dr}_{dr}, \underbrace{\phi+d\phi}_{rd\phi}, \underbrace{z+dz}_{dz})$ نمو می‌دهیم

جزء خطی در این دستگاه قطر جزء حجمی نشان داده در شکل بالا است

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 \qquad (۱۵.۱)$$

جزءهای سطحی در راستاهای $\vec{a}_r$ و $\vec{a}_\phi$ و $\vec{k}$ عبارتند از:

$$\begin{aligned} \vec{da} &= (rd\phi)dz\vec{a}_r \\ \vec{da} &= drdz\vec{a}_\phi \\ \vec{da} &= (rd\phi)dr\vec{k} \end{aligned} \qquad (۱۶.۱)$$

و جزء کوچک حجم در این دستگاه عبارت است از.

$$dv = dr(rd\phi)dz \qquad (۱۷.۱)$$

مثال: در دستگاه مختصات استوانه، مساحت، قسمتی از سطح استوانه محدود به $r = 2m$، $z = 5m$ و $\frac{\pi}{6} \leqslant \phi \leqslant \frac{2\pi}{3}$ است بدست آورید.

حل: در این حالت جزء سطح $da = r\, d\phi dz$ است

$$A = \int_{z=0}^{5}\int_{\phi=\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} 2 d\phi dz = 5\pi\ m^2 = 5(180) = 900 m^2$$

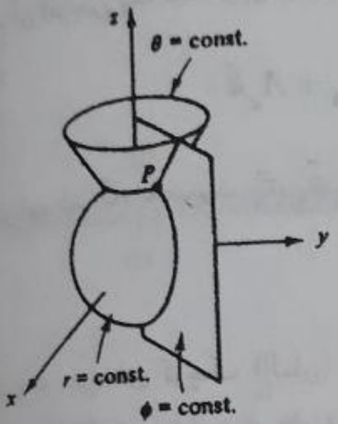
۳ـ دستگاه مختصات کروی: در این دستگاه هر نقطه p توسط سه مختصهٔ (r, θ, ϕ) بدست می‌آید در این دستگاه ثابت$=\phi$ همان نیم صفحهٔ مختصاب استوانه‌ای است و ثابت$=r$ کره‌ای است به مرکز مبداء و ثابت$=\theta$ مخروط دواری است که محور آن منطبق بر z و رأس آن در مبداء قرار دارد.

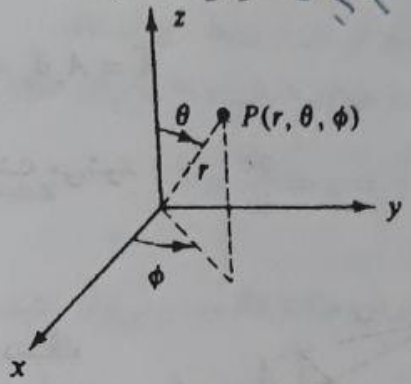
(مبدأ را به نقطه وصل کنه)

$0 < r < \infty$ فاصله مبدأ تا نقطه

$0 \le \theta \le \pi$ زاویه با محور zها

$0 \le \phi \le 2\pi$ زاویه با محور xها

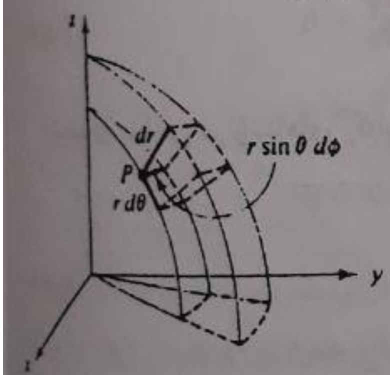




اندازه بردارهای یکه در این دستگاه مختصات ثابت بوده اما جهت و راستای آنها به مکان نقطهٔ p بستگی دارد. هر بردار را در این دستگاه می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\theta\vec{a}_\theta + A_\phi\vec{a}_\phi$$

بردارهای یکه در این دستگاه به‌صورت $\vec{r}$ و $\vec{\theta}$ و $\vec{\phi}$ نیز نوشته می‌شوند.



برای رسیدن به جزءهای کوچک در این دستگاه مختصهٔ p را به اندازهٔ $(\underbrace{r + dr}_{dr}, \underbrace{\theta + d\theta}_{rd\theta}, \underbrace{\phi + d\phi}_{r\sin\theta d\phi})$ نمو می‌دهیم.

جزء خطی در این دستگاه قطر جزء حجمی نشان داده در شکل بالا است.

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{۱۸.۱}$$

جزءهای سطحی در راستای $\vec{a}_r$ و $\vec{a}_\theta$ و $\vec{a}_\phi$ عبارتند از:

$$\begin{aligned} \vec{da} &= (rd\theta)(r\sin\theta d\phi)\vec{a}_r \\ \vec{da} &= dr(r\sin\theta d\phi)\vec{a}_\theta \\ \vec{da} &= dr(rd\theta)\vec{a}_\phi \end{aligned} \tag{۱۹.۱}$$

جزء کوچک حجم در این دستگاه عبارت است از:

$$dv = (r\sin\theta d\phi)(rd\theta)(dr) = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \tag{۲۰.۱}$$

مثال: کره‌ای به شعاع R دارای چگالی حجمی ... می‌باشد کل بار کره ...

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\hat{a}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\hat{a}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\hat{a}_3$$

$$\rho = \frac{dq}{dv} \Rightarrow dq = \rho\, dv$$

حل: چون چگالی بار متغیرات کل بار از انتگرال‌گیری بدست می‌آید:

$$q = \int \rho\, dv = \int \rho_0 r^2 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$q = \rho_0 \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \qquad dq = \rho dv \Rightarrow q = \int \rho dv$$

$$= \rho_0 \left(\frac{r^5}{5}\right)_0^R (-\cos\theta)_0^\pi (\varphi)_0^{2\pi} = \rho_0 (8) \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R} (r^2)[r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi]$$

$$= \rho_0 \left(\frac{R^5}{5}\right)(-\cos\pi + \cos 0)(2\pi - 0) = \rho_0 \frac{8R^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \rho_0 \left(\frac{R^5}{5}\right)(+2)(2\pi) = \rho_0 \frac{8R^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi = \rho_0 \frac{4\pi R^5}{5}(c)$$

$$= +\frac{4\pi}{5}\rho_0 R^5$$

نرمول:

$\int \cos x\, dx = \sin x$

$\int \sin x\, dx = -\cos x$

۳.۱. عملگرد دیفرانسیلی برداری $\vec{\nabla}$

عملگر $\vec{\nabla}$ یا دل در مختصات دکارتی به صورت زیر معرفی می‌شود

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (۲۱.۱)$$

دل یک عملگر دیفرانسیلی است زیرا می‌تواند عمل مشتق‌گیری انجام دهد و از طرف دیگر بردار است زیرا از قوانین جبر بردارها پیروی می‌کند از این عملگر در حالتهای مهم زیر استفاده می‌شود

۱ـ گرادیان: اگر عملگر دیفرانسیلی برداری دل بر روی یک تابع نرده‌ای اثر کند برداری بنام گرادیان ساخته می‌شود شکل این بردار در سه دستگاه مختصاب دکارتی ـ استوانه‌ای و کروی عبارت است از:

$$\vec{\nabla}A = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad \text{(دکارتی)}$$

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{a}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{a}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad \text{(استوانه‌ای)}\ (r,\varphi,z) \qquad (۲۲.۱)$$

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{a}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{a}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \vec{a}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \qquad \text{(کروی)}\ (r,\theta,\varphi) \quad \frac{1}{r} \quad \frac{1}{r\sin\theta}$$

* تابع اسکالر $\varphi(\vec{r})$ را در نظر می‌گیریم اگر $\varphi(\vec{r})$ را مساوی یک مقدار ثابت قرار دهیم یک سطح به وجود می‌آید در این حالت: c

$$\vec{f}_0 = \frac{\vec{\nabla}\varphi}{|\vec{\nabla}\varphi|}$$

۱ـ $\vec{\nabla}\varphi$ بر سطح عمود است لذا برای پیدا کردن بردار یکه عمود بر سطح $\varphi = c$

۲ـ بیشینهٔ افزایش تابع $\varphi(\vec{r})$ نسبت به جابجایی $\vec{dr}$ توسط $\vec{\nabla}\varphi$ داده می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\vec{\nabla}f = \vec{n}\frac{d\varphi}{dn} \qquad (۲۳.۱)$$

که $\vec{n}dn$ جابجایی $\vec{dr}$ عمود بر سطح ثابت $=\varphi$ می‌باشد. نکته جالب توجه این است که چون $\vec{\nabla}f$ عمود بر سطح ثابت $=\varphi$ است از گرادیان می‌توان برای تولید بردارهای یکه در دستگاههای مختصات استفاده کرد به عبارت دیگر

$$\frac{\vec{\nabla}f}{|\vec{\nabla}f|} = \vec{f}_0 \qquad (۲۴.۱)$$

بردار یکه عمود بر سطح

موفق و موید باشید